ω-正則集合から成る Barua 階層の対称差表現について

高 橋 信 行*

1. はじめに

Wagner[8] は ω-正則集合のクラスの上に Wagner 階層 (Wagner hierarchy) と呼ばれるある階層を構築した．その後，Kaminski[2] は集合演算の組み合わせによる方法で ω-正則集合の上に Wagner 階層を作る一方，Barua[1] は Kuratowski[3] に起源をもつ交代差演算による方法を用いて ω-正則集合上に階層を作り上げた．Takahashi[7] は上記の Kaminski の階層と Barua の階層の同値性を証明し，Wagner 階層が極めて安定した階層であることを示した．

1990 年代後半，Selivanov[5]，[6] によって細階層 (fine hierarchy) の手法が提案された．Selivanov[6] よりも前の階層の長さが順序数 ω までであったのに対し，Selivanov[6] は ω-正則集合のクラスをより細かく階層化し，階層の長さを ω^{ω} まで延ばした．これにより従来の W-K-B 階層 (Wagner-Kaminski-Barua hierarchy) を細階層の中に埋め込むことに成功したのである．

本稿では W-K-B 階層の細階層による表現を Selivanov[5]，[6] の証明とは異なるより平易な方法で提示する．

*) e-mail: takahasi@shodai.ac.jp

2. 準　備

Σ は少なくとも 2 つの要素をもつ有限集合とする．空語 λ を含む Σ 上の語の全体を Σ^* で表わす．自然数の全体 ω から Σ への関数は，Σ 上の ω-語（ω-word）と呼ばれる．Σ 上の ω-語の全体を Σ^ω で表わす．ω-語 $\alpha \in \Sigma^\omega$ は $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots$ と表わされる．ここに $\alpha_i = \alpha(i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$ である．Σ^* (Σ^ω) の任意の部分集合を Σ 上の言語（ω-言語）と呼ぶ．

$x \in \Sigma^*$，$z \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ に対して適当な $y \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ が存在して $z = xy$ と書けるとき x は z の始切片（initial segment）と呼ばれ，$x < z$ で表わす．

定義 2.1　各 $x \in \Sigma^*$ に対して x の開基（open base）N_x を次のように定める．

$$N_x = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid x < \alpha\}$$

ω-言語 $A \subseteq \Sigma^\omega$ が Σ^ω 上の直積位相の開集合（open set）であるとは，適当な $B \subseteq \Sigma^*$ が存在して

$$A = \bigcup_{x \in B} N_x$$

と書けることである．ω-言語 $A \subseteq \Sigma^\omega$ が閉集合（closed set）であるとは，A の補集合 $\bar{A}$ が開集合であることである．Σ_1^0 と Π_1^0 は，それぞれ open sets の全体，closed sets の全体とする．Π_2^0（Σ_2^0）は open（closed）sets の可算積（可算和）で表わされる ω-言語の全体である．Σ_3^0（Π_3^0）は Π_2^0-sets（Σ_2^0-sets）の可算和（可算積）で表わされる ω-言語の全体である．以下，同様にこの手続きを繰り返す．このようにして構築された列 $\{\Sigma_n^0\}_{n<\omega}$ は有限ボレル階層と呼ばれ，すべての可算順序数の上にまで拡張される．その結果，出来上がる列 $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha<\omega_1}$ をボレル階層という．

定義 2.2 $M=(K, \Sigma, \delta, q_0)$ を Σ-table という．ここに K は空でない有限集合で K の元を状態 (state) という．$q_0 \in K$ は特に初期状態と呼ばれ，δ は $K \times \Sigma$ から K への関数である．

Σ-table $M=(K, \Sigma, \delta, q_0)$ と ω-語 $\alpha \in \Sigma^\omega$ が与えられたとする．α 上の M の run r とは次式を満たす ω から K への関数のことである．

$$\begin{cases} r(0)=q_0 \\ r(n+1)=\delta(r(n), \alpha(n)) \text{ for } n \geq 0 \end{cases}$$

M が $\alpha \in \Sigma^\omega$ の上を走る間に無限回出現する状態の集合 $\mathrm{In}(\alpha, M)$ を次のように定める．

$$\mathrm{In}(\alpha, M)=\{q \in K \mid \mathrm{Card}(r^{-1}(q))=\aleph_0\}$$

更に $\mathscr{E}=\{\mathrm{In}(\alpha, M) \mid \alpha \in \Sigma^\omega\}$ とおく．$\mathscr{E}$ を M のループ (loop) という．$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{E}$ に対し $(M, \mathscr{M})$ を Muller オートマトンといい

$$L(M, \mathscr{M})=\{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathrm{In}(\alpha, M) \in \mathscr{M}\}$$

を ω-正則集合 (ω-regular set) と呼ぶ．Σ 上の ω-正則集合の全体を $\mathscr{R}_\Sigma$ で表わす．Σ が明らかな場合は，単に $\mathscr{R}$ と書く．$\mathscr{R} \subseteq \Delta_3^0=\Sigma_3^0 \cap \Pi_3^0$ なる関係が知られている．なお本稿では 2 つの集合 x, y について $x \cap y$ を xy で表わし，クラス A, B について $\{xy \mid x \in A, y \in B\}$ を AB で表わす．

定義 2.3 Σ^ω のすべての部分集合から成る集合 $\mathscr{P}(\Sigma^\omega)$ はブール代数である．各 $n<\omega$ に対し $L_n=\Sigma_{n+1}^0$ $(\subseteq \mathscr{P}(\Sigma^\omega))$ とおく．L_n は束であり

$$(*) \quad L_n \cup \check{L}_n \subseteq L_{n+1}$$

なる関係が成り立つことが知られている．ここにクラス $A(\subseteq \mathscr{P}(\Sigma^\omega))$ について

$$\check{A}=\{\bar{a} \mid a \in A\}$$

である．関係（*）を満たす列 $L=\{L_n\}_{n<\omega}$ をブール代数 $\mathcal{P}(\Sigma^\omega)$ の基(base) という．Σ 上の ω-言語から成るクラスの上の演算 Bisep を

Bisep $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}_0,\ \mathrm{Y}_1,\ \mathrm{Y}_2)$

$$=\{x_0y_0 \cup x_1y_1 \cup \bar{x}_0\bar{x}_1y_2 \mid x_i \in \mathrm{X},\ y_i \in \mathrm{Y}_i,\ x_0x_1y_0=x_0x_1y_1\}$$

で定める．

base L 上の細階層 (fine hierarchy) とは次のように定義される列 $\{S^n_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ $(n<\omega)$ の部分列 $\{S_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ のことである．ここに $\varepsilon_0=\sup\{\omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^\omega},\cdots\}$ で，クラス S^n_α は $\alpha<\varepsilon_0$ について次のように帰納的に定義される ω-言語から成る集合である．

Basis $S^n_0=\{\phi\}$ for all $n<\omega$

Induction Step

$S^n_{\omega^\gamma}=S^{n+1}_\gamma$ for all $\gamma>0,\ n<\omega$

$S^n_{\beta+1}=$ Bisep $(L_n,\ S^n_\beta,\ \check{S}^n_\beta,\ S^n_0)$ for all $\beta<\varepsilon_0,\ n<\omega$

$S^n_{\beta+\omega^\gamma}=$ Bisep $(L_n,\ S^n_\beta,\ \check{S}^n_\beta,\ S^n_{\omega^\gamma})$ for all $\gamma>0$, β of the form $\beta=\omega^\gamma\beta_1$, and $n<\omega$.

上記の手続きで S^n_α が定義された後，任意の $\alpha<\varepsilon_0$ に対して $S_\alpha=S^0_\alpha$ とおく．

定義 2.4 $\alpha<\omega^\omega$, $n<\omega$ に対し

$$\mathscr{R}^n_\alpha=\mathscr{R} \cap S^n_\alpha$$

とおく．

注意 2.5 定義 2.3 で定めた通り細階層 $\{S_\alpha\}$ は ε_0 より小さな順序数に対して定義されているが，$\bigcup_{\alpha<\omega^\omega}\mathscr{R}_\alpha=\mathscr{R}$, $\forall\alpha\geq\omega^\omega\ \mathscr{R}_\alpha=\mathscr{R}$ であることが知

られている．すなわち ω-正則集合の中で議論するときの階層の長さは高々 ω^ω までであるので，定義 2.4 で $\mathscr{R}_\alpha^n$ を定めるとき α は ω^ω より小さい順序数としている．

定義 2.6 $\mu \in \omega^*$ を任意に固定する．L 上の μ-tree とは，次の条件を満たす集合の集合 $\{a_\sigma \mid \sigma \in \{0, 1\}^{\leq|\mu|}\}$ のことである．

(i) $a_\lambda = \Sigma^\omega$

(ii) $\forall \sigma \in \{0, 1\}^* \quad \forall k \leq 1 \quad a_\sigma \supseteq a_{\sigma k}$

(iii) $|\sigma| > |\mu|$ なる σ に対して $a_\sigma = \phi$

$|\sigma| \leq |\mu|$ なる σ に対して $a_{\sigma k} \in L_{\mu(|\sigma|)}$

上に定めた μ-tree $\{a_\sigma\}$ が，集合 $A \subseteq \Sigma^\omega$ を定義する (define) とは

$$A = \bigcup_\sigma \tilde{a}_{\sigma 1}$$

$$\bar{A} = \tilde{a}_\lambda \cup \bigcup_\sigma \tilde{a}_{\sigma 0}$$

が成り立つことである．ここに $\tilde{a}_\tau = a_\tau \bar{a}_{\tau 0} \bar{a}_{\tau 1}$ である．

L 上の μ-tree によって定義された集合の全体を T_μ で表わす．

定義 2.7 自然数の有限列 $\mu_\alpha^n \in \omega^*$ を以下のように $\alpha < \varepsilon_0$ について帰納的に定義する．

Basis $\mu_0^n = \lambda$ for all $n < \omega$

Induction Step

$\mu_{\alpha+1}^n = n\mu_\alpha^n$ for all $n < \omega$

$\mu_{\omega^\gamma}^n = \mu_\gamma^{n+1}$ for all $n < \omega,\ \gamma > 0$

$\mu_{\delta+\omega^\gamma}^n = \mu_{\omega^\gamma}^n \ n \ \mu_\delta^n$ for all $n < \omega$ and $\delta = \omega^\gamma \delta'$ with $\gamma > 0$.

命題 2.8 (Selivanov [6；Proposition 4.7])

任意の $\alpha<\varepsilon_0$, 任意の $n<\omega$ に対して

$$S_\alpha^n = T\mu_\alpha^n$$

である.

定義 2.9 $\mathscr{L}_0=\mathscr{R}\cap\Sigma_1^0$, $\mathscr{L}_1=\mathscr{R}\cap\Sigma_2^0$, $\mathscr{L}_{n+2}=\mathscr{R}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ とおく. そして次のように ω-言語の集合 $\mathscr{D}_{m+1}^n$ $(m, n<\omega)$ を定める.

任意の $w\subseteq\Sigma^\omega$ について $w\in\mathscr{D}_{m+1}^n$ とは $\mathscr{L}_n$-sets の減少列 $G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_m$ が存在して

$$w=\bigcup_{2i\leq m} G_{2i}\overline{G_{2i+1}}$$

と書けることである. ただし m が偶数のときは $G_{m+1}=\phi$ と定める.

Barua[1] は $\{\mathscr{D}_{m+1}^1\}_{m<\omega}$ を使って Wagner 階層を記述し, Takahashi[7] は $\{\mathscr{D}_{m+1}^1\}_{m<\omega}$ が Kaminski[2] で提示されていた階層と一致することを証明した. 本稿の階層 $\{\mathscr{D}_{m+1}^n\}_{m<\omega}$ は Barua[1] が提示した階層を一般の $n<\omega$ に拡張したものであるので定義 2.9 で与えられる階層 $\{\mathscr{D}_{m+1}^n\}_{m<\omega}$ を Barua 階層 (Barua hierarchy) と呼ぶことにする.

3. Selivanov による細階層の構築

Selivanov[5][6] は定義 2.3 に述べた方法で $\mathscr{R}$ の上に細階層 (fine hierarchy) $\{\mathscr{R}_\alpha^n\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ を構築した. この階層は, 従来知られていた Wagner-Kaminski-Barua の階層 (coarse hierarchy) よりも細かい構造を持つので Selivanov の階層 $\{\mathscr{R}_\alpha^n\}$ を使って W-K-B 階層 $\{\mathscr{D}_{m+1}^n\}$ を記述することが出来る.

本節では Selivanov[5] で得られている結果を 2 つ引用し, 次節の議論のための準備を行う.

補題 3.1 (Selivanov [5 ; Property 4.4 (ii)])

$$\forall\, n<\omega\ \forall\, m<\omega \quad S^n_{m+1}\,L_n=S^n_{m+1}$$

[証明] $w \in S^n_{m+1}\,L_n$ を任意にとると適当な $a \in S^n_{m+1}$, $u \in L_n$ が存在して $w=au$ と書ける.

$$S^n_{m+1}=\mathrm{Bisep}\,(L_n,\ S^n_m,\ \check{S}^n_m,\ \{\phi\})$$

であるから適当な $x_0, x_1 \in L_n$, $y_0 \in S^n_m$, $y_1 \in \check{S}^n_m$ について $a=x_0y_0 \cup x_1y_1$ であって, しかも $x_0x_1y_0=x_0x_1y_1$ である. このとき

$$au=(ux_0)\,y_0 \cup (ux_1)\,y_1$$

で ux_0, $ux_1 \in L_n$, $(ux_0)(ux_1)\,y_0=(ux_0)(ux_1)\,y_1$ であるから $w=au \in S^n_{m+1}$ である. よって $S^n_{m+1}\,L_n \subseteq S^n_{m+1}$.

一方 $\Sigma^\omega \in L_n$ であるから

$$S^n_{m+1} \subseteq S^n_{m+1}\,\{\Sigma^\omega\} \subseteq S^n_{m+1}\,L_n$$

となる. 以上により $S^n_{m+1}\,L_n=S^n_{m+1}$. ☒

補題 3.2 (Selivanov [5 ; Property 4.4 (iii)])

$$\forall\, n<\omega\ \forall\, m<\omega \quad S^n_{m+2}=\check{S}^n_{m+1}\,L_n$$

[証明] $\check{S}^n_{m+1}\,L_n \subseteq S^n_{m+2}$ から証明する. まず $w \in \check{S}^n_{m+1}\,L_n$ を任意にとると $w=\bar{a}u$ と書けて $a \in S^n_{m+1}\,L_n$, $u \in L_n$である.

ここで $\phi\Sigma^\omega a=\phi\Sigma^\omega \bar{a}$ で $\bar{a}=\phi a \cup \Sigma^\omega \bar{a} \in S^n_{m+2}$ であるから

$$\check{S}^n_{m+1} \subseteq S^n_{m+2}$$

が成り立つ. 補題 3.1 により

$$\check{S}^n_{m+1}\,L_n \subseteq S^n_{m+2}\,L_n=S^n_{m+2}.$$

逆に $a \in S^n_{m+2}$ を任意にとる．命題2.8により $a \in T\mu^n_{m+2}$．すなわち a は適当な μ^n_{m+2}-tree $\{a_\sigma\}$ によって定義されている．この μ^n_{m+2}-tree $\{a_\sigma\}$ に対して Selivanov [5 ; Property 4.2 (ix)] を適用する．すなわち自然数列 ν を $k=0, 1, \cdots, |\mu^n_{m+2}|-2$ に対し

$$\nu(k)=\mu^n_{m+2}(k+1)$$

で定め，tree $\{b_\sigma\}$ を

$$b_\lambda=\Sigma^\omega$$
$$b_{\sigma k}=a_{0\overline{\sigma k}} \cup a_{1\overline{\sigma k}}$$

で作成する．Selivanov [5 ; Property 4.2 (ix)] によれば $\{b_\sigma\}$ は ν-tree で，しかも $a=\bar{b}w$ を満たすような b を定義する．ただし $w=a_{00} \cup a_{01} \cup a_1$ である．

ここで自然数列 μ^n_{m+2} について

$$\mu^n_{m+2}=n\mu^n_{m+1}=nn\mu^n_m \tag{1}$$

が成り立っており，ν の作り方から

$$|\nu|=|\mu^n_{m+2}|-1$$
$$=|\mu^n_m|+1$$
$$=|\mu^n_{m+1}|$$

が成り立つので $\{b_\sigma\}$ は μ^n_{m+1}-tree である．すなわち，b は μ^n_{m+1}-tree $\{b_\sigma\}$ によって定義されている．よって

$$b \in T\mu^n_{m+1}=S^n_{m+1}. \tag{2}$$

また (1) から $\mu^n_{m+2}(0)=\mu^n_{m+2}(1)=n$ であって定義2.6から $a_{\sigma k} \in L\mu_{(|\sigma|)}$ である．したがって

$$a_{00} \in L\mu^n_{m+2}(1)=L_n$$
$$a_{01} \in L\mu^n_{m+2}(1)=L_n$$
$$a_{\lambda 1} \in L\mu^n_{m+2}(0)=L_n$$

が成り立つ．L_n は $\cup$ の下で閉じているので

$$w = a_{00} \cup a_{01} \cup a_1 \in L_n. \tag{3}$$

(2) (3) により

$$a = \bar{b}w \in \check{S}^n_{m+1} L_n.$$

以上により

$$S^n_{m+2} = \check{S}^n_{m+1} L_n$$

である． $\boxtimes$

系 3.3　$\forall n < \omega \, \forall m < \omega$

$$\mathscr{R}^n_{m+1} = \check{\mathscr{R}}^n_m \mathscr{L}_n$$

[証明]

$m=0$ のとき　$\mathscr{R}^n_{m+1} = \mathscr{R}^n_1$

$$= \mathscr{L}_n$$

$$= \check{\mathscr{R}}^n_0 \mathscr{L}_n$$

$$= \check{\mathscr{R}}^n_m \mathscr{L}_n.$$

$m \geq 1$ のとき補題 3.2 により

$$\mathscr{R}^n_{m+1} = \mathscr{R} \cap S^n_{m+1}$$

$$= \mathscr{R} \cap \check{S}^n_m L_n$$

$$= \mathscr{R} \cap \check{S}^n_m L_n \cap \mathscr{R}$$

$$= \check{\mathscr{R}}^n_m \mathscr{L}_n.$$

$\boxtimes$

4.　細階層による W-K-B 階層の表現

クラス $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ に対して

$$\mathscr{A} + \mathscr{B} = \{a \triangle b \mid a \in \mathscr{A},\ b \in \mathscr{B}\}$$

とおく．ここに $\triangle$ は対称差演算である．

本節では，次の主定理を証明する．この主張は既に Selivanov[5] [6] で述べられているが，本稿の証明は Selivanov の議論よりも平易である．

定理 4.1 (主定理) 任意の $w \subseteq \Sigma^{\omega}$，任意の m，$n<\omega$ に対して次の (i) (ii) (iii) は同値である．

(i) $w \in \mathscr{R}^{n}_{m+1}$

(ii) $w \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ ($m+1$ 回)

(iii) $w \in \mathscr{D}^{n}_{m+1}$

証明は補題 4.5 [(i) ならば (ii)]，補題 4.6 [(ii) ならば (iii)]，補題 4.7 [(iii) ならば (i)] に分けて行う．まず補題 4.5 のための準備から始める．

補題 4.2 $u(v_1 \triangle v_2) = uv_1 \triangle uv_2$

[証明]

$$
\begin{aligned}
&u(v_1 \triangle v_2)\\
&= u(v_1\overline{v_2} \cup v_2\overline{v_1})\\
&= uv_1\overline{v_2} \cup uv_2\overline{v_1}\\
&= uv_1\ (\overline{u} \cup \overline{v_2}) \cup uv_2\ (\overline{u} \cup \overline{v_1})\\
&= uv_1\overline{u\ v_2} \cup uv_2\overline{uv_1}\\
&= uv_1 \triangle uv_2
\end{aligned}
$$
☒

補題 4.3 $l \geq 2$ に対して

$$u(v_1 \triangle \cdots \triangle v_l) = uv_1 \triangle \cdots \triangle uv_l.$$

[証明]

Basis $l=2$ のときは，補題 4.2 の通り成り立つ．

Induction Step $l \geq 2$ に対して，帰納法の仮定を置き $w = v_1 \triangle v_2 \triangle \cdots \triangle v_l$ とおく．

このとき

$$u(v_1 \triangle v_2 \triangle \cdots \triangle v_l \triangle v_{l+1})$$
$$= u(w \triangle v_{l+1})$$
$$= uw \triangle uv_{l+1} \quad \text{(補題 4.2 による.)}$$
$$= u(v_1 \triangle v_2 \triangle \cdots \triangle v_l) \quad \triangle uv_{l+1}$$
$$= uv_1 \triangle \cdots \triangle uv_l \triangle uv_{l+1} \quad \text{(帰納法の仮定による.)}$$

以上により，補題 4.3 は成り立つ. ☒

補題 4.4

$$u \in \mathscr{L}_n,\ a \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (m\ \text{回})$$
$$\text{ならば}\ ua \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (m\ \text{回})$$

[証明]　$u \in \mathscr{L}_n$, $a \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ を任意にとる. よって適当な $v_i \in \mathscr{L}_n$ $(i=1, \cdots, m)$ について $a = v_1 \triangle \cdots \triangle v_m$ である. このとき

$$ua = u(v_1 \triangle \cdots \triangle v_m)$$
$$= uv_1 \triangle \cdots \triangle uv_m \quad \text{(補題 4.3 による.)}$$

$u \in \mathscr{L}_n$ で各 $v_i \in \mathscr{L}_n$ であるから $uv_i \in \mathscr{L}_n$.
したがって $ua \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ （m 回）. ☒

補題 4.5　$\mathscr{R}^n_{m+1} \subseteq \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ （$m+1$ 回）

[証明]　$m < \omega$ についての帰納法による.

Basis　$m=0$ のとき，系 3.3 で議論したように $\mathscr{R}^n_1 = \mathscr{L}_n$ である.

Induction Step　$\mathscr{R}^n_m \subseteq \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ （m 回）との帰納法の仮定を置く.

$w \in \mathscr{R}^n_{m+1}$ を任意にとると系 3.3 から適当な $u \in \mathscr{L}_n$, $a \in \mathscr{R}^n_m$ が存在して

$$\begin{aligned} w &= u\overline{a} \\ &= u(\overline{u} \cup \overline{a}) \\ &= u\ (\overline{ua}) \cup \overline{u}\ (ua) \\ &= u \triangle ua. \end{aligned}$$

帰納法の仮定から

$$a \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (m\ 回).$$

補題 4.4 から

$$ua \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (m\ 回).$$

したがって

$$w = u \triangle ua \in \mathscr{L}_n + (\mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n) \quad (m+1\ 回).$$

以上により

$$\mathscr{R}^n_{m+1} \subseteq \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (m+1\ 回). \qquad \boxtimes$$

補題 4.6

$$\mathscr{D}^n_{m+1} \supseteq \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n \quad (\mathrm{m}+1\ 回)$$

[証明]　$m < \omega$ についての帰納法による．

Basis　$m=0$ のとき，$w \in \mathscr{L}_n$ を任意にとると，適当な $G_0(=w) \in \mathscr{L}_n$ が存在して

$$w = \bigcup_{2i \leq 0} G_{2i}\ \overline{G_{2i+1}}$$

と書ける．よって $w \in \mathscr{D}^n_1$.

Induction Step　m についての帰納法の仮定を置き $w \in (\mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n) + \mathscr{L}_n$　($m+1$ 個の $\mathscr{L}_n$ 達の和）を任意にとる．

すると適当な $x \in \mathscr{L}_n + \cdots + \mathscr{L}_n$ (m 個)，$y \in \mathscr{L}_n$ が存在して

$$w = x \triangle y$$

である．

帰納法の仮定から$\mathscr{L}_n$-setsの減少列$x_0 \supseteq x_1 \supseteq \cdots \supseteq x_{m-1}$が存在して

$$x = \bigcup_{2i \leq m} x_{2i} \ \overline{x_{2i+1}}$$

である．

これらm個の$x_i \in \mathscr{L}_n$と$y \in \mathscr{L}_n$を使って，次のようにG_i($i=0$, $1, \cdots, m$) を定める．

$i=0, 1, \cdots, m$に対し

$$G_i = x_i \cup x_{i-1} \ y$$

とおく．ただし$x_{-1} = \Sigma^\omega$，$x_m = \phi$とする．

このとき各G_i($i=0, 1, \cdots, m$) は$\mathscr{L}_n$-setで$i=0, 1, \cdots, m-1$に対して

$$\begin{aligned} G_i &= x_i \cup x_{i-1} \ y \\ &\supseteq x_{i+1} \cup x_i \ y \\ &= G_{i+1} \end{aligned}$$

であるから，減少列$G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_m$が得られる．

更に$w = \bigcup_{2i \leq m} G_{2i} \ \overline{G_{2i+1}}$が成り立つことが容易に確かめられる．

したがって$w \in \mathscr{D}^n_{m+1}$． ☒

補題 4.7 $\mathscr{D}^n_{m+1} \subseteq \mathscr{R}^n_{m+1}$

[証明] $w \in \mathscr{D}^n_{m+1}$とすると$\mathscr{L}_n$-setsの減少列$G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_m$が存在して

$$w = \bigcup_{2i \leq m} G_{2i} \ \overline{G_{2i+1}}$$

である．

このとき次のようにμ^n_{m+1}-tree $\{a_\sigma\}$を作成する．まず$a_\lambda = \Sigma^\omega$とおく．$|\sigma| \leq m+1$なる$\sigma \in 2^*$で$\sigma = (10)^*1$または$(10)^*$なる形の$\sigma$に対して

$$a_{(10)^i1}=G_{2i}$$

$$a_{(10)^{i+1}}=G_{2i+1}$$

とおく．$(i=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

ただし $m=2k$ のとき $a_{(10)^k1}=G_m$, $m=2k+1$ のとき $a_{(10)^{k+1}}=G_m$で $|\sigma|>m+1$ なる $\sigma\in 2^*$ に対しては $a_\sigma=\phi$, $(10)^*$ でも $(10)^*1$ でもない $\sigma\in 2^*$ に対しても $a_\sigma=\phi$ とおく．

このように作成された μ^n_{m+1}-tree $\{a_\sigma\}$ について

$$w=\bigcup_\sigma \tilde{a}_{\sigma 1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\overline{w}=\tilde{a}_\lambda\cup\bigcup_\sigma \tilde{a}_{\sigma 0} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

が成り立つ．

実際に tree の作り方から $i=0,\ 1,\ 2,\cdots$に対して

$$\tilde{a}_{(10)^i1}=a_{(10)^i1}\ \overline{a_{(10)^i10}}\ \overline{a_{(10)^i11}}$$
$$=G_{2i}\ \overline{G_{2i+1}}$$

が，成り立ち

$m=2k$ のとき

$$\tilde{a}_{(10)^k1}=a_{(10)^k1}\ \overline{a_{(10)^k10}}\ \overline{a_{(10)^k11}}$$
$$=G_m,$$

$m=2k+1$ のとき

$$\tilde{a}_{(10)^k1}=a_{(10)^k1}\ \overline{a_{(10)^k10}}\ \overline{a_{(10)^k11}}$$
$$=G_{m-1}\ \overline{G_m}$$

であるから

$$\begin{aligned}
w&=\bigcup_{2i\leq m} G_{2i}\ \overline{G_{2i+1}}\\
&=G_0\ \overline{G_1}\cup G_2\ \overline{G_3}\cup\cdots\cup G_{2k}\ \overline{G_{2k+1}}\\
&=\tilde{a}_{(10)^01}\cup\tilde{a}_{(10)^11}\cup\cdots\cup\tilde{a}_{(10)^k1}\\
&=\bigcup_{|\sigma|\leq 2k}\tilde{a}_{\sigma 1}\\
&=\bigcup_\sigma \tilde{a}_{\sigma 1}.
\end{aligned}$$

一方，$\tilde{a}_\lambda=\Sigma^\omega\ \overline{G_0}$であって $i=0$，1，2，…に対して

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{(10)^{i+1}}&=a_{(10)^{i+1}}\ \overline{a_{(10)^{i+1}0}}\ \overline{a_{(10)^{i+1}1}}\\&=G_{2i+1}\ \overline{G_{2(i+1)}},\end{aligned}$$

$m=2k$ のとき

$$\tilde{a}_{(10)^k}=a_{(10)^k}\ \overline{a_{(10)^k0}}\ \overline{a_{(10)^k1}}=G_{m-1}\ \overline{G_m},$$

$m=2k+1$ のとき

$$\tilde{a}_{(10)^{k+1}}=a_{(10)^{k+1}}\ \overline{a_{(10)^{k+1}0}}\ \overline{a_{(10)^{k+1}1}}=G_m$$

である．さて

$$\begin{aligned}\overline{w}=\Sigma^\omega\ \overline{G_0}\cup G_1\ \overline{G_2}\cup G_3\ \overline{G_4}\cup\cdots\\ \cdots\cup G_{2k-1}\ \overline{G_{2k}}\cup G_{2k+1}\ \overline{G_{2k+2}}\end{aligned}$$

である．ただし $m=2k$ のとき $G_{2k+1}=G_{2k+2}=\phi$，$m=2k+1$ のとき $G_{2k+2}=\phi$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\tilde{a}_\lambda\cup\tilde{a}_{10}\cup\tilde{a}_{(10)^2}\cup\cdots\cup\tilde{a}_{(10)^k}\cup\tilde{a}_{(10)^{k+1}}\\&=\tilde{a}_\lambda\cup\bigcup_{|\sigma|\leq 2k+2}\tilde{a}_\sigma\\&=\tilde{a}_\lambda\cup\bigcup_{\sigma}\tilde{a}_{\sigma 0}.\end{aligned}$$

以上，確認した通り (1) (2) が成り立つ．よって μ^n_{m+1}-tree $\{a_\sigma\}$ は w を定義する．すなわち

$$w\in T\mu^n_{m+1}.$$

命題2.8により $T\mu^n_{m+1}=S^n_{m+1}$ であるから

$$w\in S^n_{m+1}.$$

一方，$\mathscr{L}_n\subseteq\mathscr{R}$ で $\mathscr{R}$ はブール演算の下で閉じているから $w\in\mathscr{R}$.

したがって $w\in\mathscr{R}^n_{m+1}$．以上により $\mathscr{D}^n_{m+1}\subseteq\mathscr{R}^n_{m+1}$ である． ☒

補題4.5，4.6，4.7により主定理の証明は完成する．

5. むすび

Takahashi[7] で指摘されているように Wagner 階層を構築するには複数の方法が存在する．Selivanov[6] は Bisep 演算を用いて，一般的には順序数 ε_0 までの細階層を構築する具体的方法を提示した．Selivanov の方法により，たとえば計算量クラス $\mathscr{P}$ の上の多項式階層（polynomial hierarchy）を更に細分化することが可能になる．(Selivanov[4])

従来，知られていた Wagner 階層は本稿では$\{\mathscr{D}^n_{m+1}\}$で表わされている．定理 4.1 で述べられているように $\mathscr{D}^n_{m+1}$ に対して

$$\mathscr{D}^n_{m+1}=\mathscr{L}_n+\cdots+\mathscr{L}_n \quad (m+1\text{ 回})$$

$$\mathscr{D}^n_{m+1}=\mathscr{R}^n_{m+1}$$

という具合に別な 2 つの表現が可能である．この等式は既に Selivanov[5][6] で得られているが，本稿ではより素朴な方法でこの等式の成立を証明した．証明の中で用いた μ_α-tree は情報の蓄えと操作が煩雑であるので別の具体的情報蓄積方法を考案することが今後の課題である．

謝　辞

筆者は 1999 年に横浜商科大学学術研究会からグループ・個人研究助成を受け渡独する機会を得た．その際 Halle 大学の Ludwig Staiger 教授から Selivanov の仕事を紹介して頂き細階層の手法を知ることとなった．横浜商科大学学術研究会と細階層の研究を始める切っ掛けを与えて頂いた Staiger 教授に伏して深謝の意を表します．また本稿を作成するに当たり山崎秀記一橋大学教授，守谷哲夫国士館大学教授には内容を詳細に読んで頂いた．更に日頃からご指導を賜る田中尚夫法政大学名誉教授には，特別の感謝の意を表します．

参考文献

[1] R. Barua, *The Hausdorff-Kuratowski hierarchy of ω-regular languages and a hierarchy of Muller automata,* ***Theoret. Comput. Sci.*** **96** (1992) 345-360.

[2] M. Kaminski, *A classification of ω-regular languages*, ***Theoret. Comput. Sci.*** **36** (1985) 217-229.

[3] K. Kuratowski, ***Topology Volume I***, Academic Press, New York and London (1966)

[4] V.L. Selivanov, *Two refinements of the polynomial hierarchy*, in: Proc. Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science STACS-94, ***Lecture Notes in Computer Science***, Springer, Berlin **775** (1994) 439-448.

[5] V.L. Selivanov, *Fine hierarchies and Boolean terms*, ***J. Symbol. Logic*** **60** (1995) 289-317.

[6] V.L. Selivanov, *Fine hierarchy of regular ω-languages*, **Theoret. Comput. Sci. 191** (1998) 37-59.

[7] N. Takahashi, *Various hierarchies of ω-regular sets*, ***Theoret. Comput. Sci.*** **174** (1997) 259-268.

[8] K. Wagner, *On ω-regular sets*, ***Inform. and Contr.*** **43** (1979) 123-177.