<研究ノート>

球面上の異常な図形

小　林　富　郎

ここに「異常な」というのは，球面上のある図形がその一部分と合同（記号で≅，ただし普通には≡を使っている）になるという性質をもつことである．ここに「合同」とは平面上でいえば，平行移動，回転，直線での折りかえし——対称，によって重なるという周知のことがらである．球面上においてもこれに準ずる．これから示すことは，F. Hausdorff　Grundzüge der Mengenlehre　1914年 pp 469——472にあるとのことであるが，この証明は，W.Sierpinski　On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition による．この証明に必要なことがらで超越数以外のことは極めて初歩的な数学であって，主として変換群の単位元，逆元の意味それに手段としては帰納法，言葉としてはこの少々長い証明のなかに一度だけ出てくる Zermelo の公理(集合が互いに素な部分集合の和に分けられていると，どの部分集合ともただ1個の要素を共有している集合がある）を使う程度である．この公理は大変に役に立つが，このような異常とも思われる結果を証明する場合にも顔を出す．この結論はいわば数学における「詭弁」に類する．詭弁まがいの論議がまかり通る現代に70年前の数学の「詭弁」をお見せしよう．ただし詭弁めくとはいえ，Zermelo の公理をよしとする限り正しい証明であって単なるゴマカシではない．なお「図形」といったのは正しくは「点集合」というべきである．図形といえば何か親近感がある，点集合というと何が近づきにくい．点集合を図形といいかえたのはよくないが大型間接税を売上税といいかえたよりはややささやかな言葉の詐術である．

結論である定理をあげ順次，証明を展開してゆく．

定理（Hausdorff の逆理とよばれる）

球の表面（すなわち球面）S は 4 個の互いに素なる集合（点集合）A,B,C,D の和になる，ここに D は可算集合であり，次の関係が成り立つ．$A \cong B \cong C \cong B+C$

証明　Ψ と Φ を球面 S の中心 O を通る 2 つの軸であるとし，この両軸のなす角を$\frac{1}{2}\nu$ とする；この角を後に固定して考える．ϕ を軸 Φ の回りの角 π (180°) の回転，ψ を軸 Φ の回りの角$\frac{2}{3}\pi$ (120°) の回転とする．明らかに　$\phi^2=\psi^3=1$ である，ここに 1 は 3 次元空間 R_3をそれ自身に移す単位変換であるとする．

G を R_3の次のようにしてつくられるすべての変換の集合とする．これらの変換は変換 ϕ と ψ とを有限回，任意の順序に行ってえられる変換の全体とする（このようにしてつくられる G が変換群をなすことは容易にわかる）．$\phi^2=\psi^3=1$ であるから G の元を変換 ϕ と ψ の有限個の積として表わすのに，各因子 ϕ^mを ϕ^rでおき換えることができる，ここに r は m を 2 で割った余りであり，また各因子 ψ^m を r′でおき換えられる，ここに r′は m を 3 で割った余りである（例，$\phi^5=\phi$，$\psi^5=\psi^2$，$\phi^6=\psi^6=1$）．結局 G の元は単位元 1 と有限個の因子 ϕ，ψ，ψ^2の積である．G の元をつくる ϕ，ψ，ψ^2を基本因子といい，G の元のなかでは因子 ϕ の次に ϕ が続かず，ψ か ψ^2のすぐ前，すぐ後には因子 ψ も ψ^2もでてこない．

注意すべきことは，変換 ϕ と ψ とは可換でないことである；すなわち $\phi\psi \neq \psi\phi$，つまり $\phi(\psi(p)) \neq \psi(\phi(p))$ という R_3の点 p が在存する．例えば p を軸 Ψ が球面をつらぬく点としてみるとわかる．したがって群 G は可換群でない．

G をつくるすべての変換を系統的に表わすために，G を類別する，類 G_nには n 個の基本因子の積である元の全部を入れる，単位変換（単位元）1 は類 G_0をつくる．類 G_1は 3 つの変換 ϕ，ψ，ψ^2からつくられる．すぐにためされることは，類 G_{n+1}を類 G_nからつくり出すには G_nの元で最初の因子が ϕ であるものには ψ か ψ^2 を（左から）かけ，最初の因子が ψ か ψ^2であるものには ϕ を（左から）かける

ことをやればよい．例えば$G=\{\phi, \psi, \psi^2\}$からは$G_2=\{\psi\phi, \psi^2\phi, \phi\psi, \phi\psi^2\}$がえられ，$G_2$からは$G_3=\{\psi\phi\psi, \psi^2\phi\psi, \psi\phi\psi^2, \psi^2\phi\psi^2, \phi\psi\phi, \phi\psi^2\phi\}$ができ，$G_3$からは$G_4=\{\psi\phi\psi\phi, \psi^2\phi\psi\phi, \psi\phi\psi^2\phi, \psi^2\phi\psi^2\phi, \phi\psi\phi\psi, \phi\psi^2\phi\psi, \phi\psi\phi\psi^2, \phi\psi^2\phi\psi^2\}$が出る．（n＝1，2……に対して$G_n$は　$2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$　個の変換を含む，最初の因子がϕであるものが　$2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$個，最初の因子が$\psi$か$\psi^2$であるものが　$2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$個ある．〔　〕はGaussの記号である）

次にGのすべての変換を無限数列に並べる，類G_0, G_1, G_2……の元を順次ならべるのである．

(G)　　1；ϕ，ψ，ψ^2；$\psi\phi$，$\psi^2\phi$，$\phi\psi$，$\phi\psi^2$；$\psi\phi\psi$，……軸ΦとΨとの間の角を，この系列のすべての項が異るようにとることができるのを証明する．最初の1以外はGのすべての変換は下記の4つの形のどれかである．

(1)　$\alpha=\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\phi\cdots\psi^{m_n}\phi$

(2)　$\beta=\phi\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\phi\psi^{m_n}$

(3)　$\gamma=\phi\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\phi\psi^{m_n}\phi$

(4)　$\delta=\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\phi\cdots\phi\psi^{m_n}$

ここにnは正整数（$\gamma=\phi$の場合は除く）であり，指数m_1，m_2，m_3……，m_nは1か2である．

軸ΦとΨの間の角は$\frac{1}{2}\nu$であった．軸Ψを軸OZ（直交座標系において）ととり，かつ軸Φを含む平面を平面XZととる．N＝(x,y,z)を空間R_3の与えられた点とし，$\psi(N)=(x',y',z')$とする．

座標変換のよく知られた公式を適用すると，ただちに

$$(\psi)\quad \begin{cases} x' = x\lambda - y\mu \\ y' = x\mu - y\lambda \\ z' = z \end{cases}$$

ここに　$\lambda = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$，$\mu = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$　とする．

$\psi^2 = \psi^{-1}$は軸Ψのまわりの角$-\frac{2}{3}\pi$の回転であり，$\psi^2(N) = (x', y', z')$ ここに$N = (x, y, z)$，より次のようになる．

$$(\psi^{-1})\quad \begin{cases} x' = x\lambda + y\mu \\ y' = -x\mu - y\lambda \\ z' = z \end{cases}$$

(ψ)と(ψ^{-1})をまとめると

$$(\psi^{\pm 1})\quad \begin{cases} x' = x\lambda \mp y\mu \\ y' = \pm x\mu - y\lambda \\ z' = z \end{cases}$$

次に$N = (x, y, z)$に対して$\phi(N) = (x', y', z')$とおくと

$$(\phi)\quad \begin{cases} x' = -x\cos\nu + z\sin\nu \\ y' = -y \\ z' = x\sin\nu + z\cos\nu \end{cases}$$

$N = (x, y, z)$に対し$\psi^{\pm 1}\phi(N) = (x', y', z')$とおくと

(ϕ)と$(\psi^{\pm 1})$からすぐに

$$(\psi^{\pm 1}\phi)\quad \begin{cases} x' = -x\lambda\cos\nu \pm y\mu + z\lambda\sin\nu \\ y' = \mp x\mu\cos\nu + y\lambda \pm z\mu\sin\nu \\ z' = x\sin\nu + z\cos\nu \end{cases}$$

さてαを式(1)で与えられたGの変換とする．$N = (0, 0, 1)$に対し

$\alpha(\mathrm{N})=(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ とおくと次の式がえられる.

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \xi=\sin\nu(\mathrm{a}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots) \\ \eta=\sin\nu(\mathrm{b}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots) \\ \zeta=\mathrm{c}\cos^{n}\nu+\cdots\cdots \end{cases}$$

ここに, $\mathrm{a}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots$, $\mathrm{b}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots$, $\mathrm{c}\cos^{n}\nu+\cdots\cdots$ はそれぞれ $\cos\nu$ の $\mathrm{n}-1$ 次, $\mathrm{n}-1$ 次, n 次の多項式であり, その係数は体 $\mathrm{K}(\sqrt{3})$ に属する λ と μ についての整係数の多項式である.

上の結論は $\mathrm{n}=1$ に対しては明らかに成り立つ, この理由は $\psi^2=\psi^{-1}$ であり, $\mathrm{N}=(0,\ 0,\ 1)$ に対して, $\psi^{\pm1}\phi(\mathrm{N})=(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ とおくと式$(\psi^{\pm1}\phi)$は次のようになるからである.

(5) $\xi=\lambda\sin\nu,\ \ \eta=\pm\mu\sin\nu,\ \ \zeta=\cos\nu$

ある正の整数 n に対してこの結論が成り立つと仮定する, すなわち α が, 与えられた n に対して式(1)の変換であるとすると, $\alpha(\mathrm{N})=(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ に対して式(α)をうる. $\alpha'=\psi^{\pm1}\phi(\alpha)$ とすると, 式$(\psi^{\pm1}\phi)$と(α)によって, $\alpha'(\mathrm{N})=(\mathrm{x}',\ \mathrm{y}',\ \mathrm{z}')$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{x}'&=-\sin\nu(\mathrm{a}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots\cdots)\lambda\cos\nu \\ &\quad\pm\sin\nu(\mathrm{b}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots\cdots)\mu \\ &\quad+(\mathrm{c}\cos^{n}\nu+\cdots\cdots\cdots)\lambda\sin\nu \\ &=\sin\nu((\mathrm{c}-\mathrm{a})\lambda\cos^{n}\nu+\cdots\cdots\cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y}'&=\mp\sin\nu(\mathrm{a}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots\cdots)\mu\cos\nu \\ &\quad-\sin\nu(\mathrm{b}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots\cdots) \\ &\quad\pm(\mathrm{c}\cos^{n}\nu+\cdots\cdots\cdots)\mu\sin\nu \\ &=\sin\nu(\pm(\mathrm{c}-\mathrm{a})\mu\cos^{n}\nu+\cdots\cdots\cdots) \end{aligned}$$

$$\mathrm{z}'=\sin^2\nu(\mathrm{a}\cos^{n-1}\nu+\cdots\cdots\cdots)+(\mathrm{c}\cos^{n}\nu+\cdots\cdots\cdots)\cos\nu$$

$$=(c-a)\cos^{n+1}\nu+\cdots\cdots\cdots$$

すなわち

$$x'=\sin\nu(a'\cos^n\nu+\cdots\cdots\cdots)$$

$$y'=\sin\nu(b'\cos^n\nu+\cdots\cdots\cdots)$$

$$z'=c'\cos^{n+1}\nu+\cdots\cdots\cdots$$

ここに

(6) $a'=(c-a)\lambda,\ b'=\pm(c-a)\mu,\ c'=c-a$

このことは求める結論がn＋1に対しても成り立つことを示している．このようにして結論はすべてのnに対して成り立つことが数学的帰納法で証明された．

式(6)により（$\lambda=-\frac{1}{2}$であるから）

$$c'-a'=(c-a)(1-\lambda)=\frac{3}{2}(c-a)$$

（n＝1の場合，$\alpha=\psi^{\pm1}\phi$に対して明らかに(5)によって$\alpha=\lambda$，c＝1であるから$c-a=1-\lambda=\frac{3}{2}$）したがって$c'=c-a=(\frac{3}{2})^n$　cはc′より1だけ小さい指数に対応するものだから　$c=(\frac{3}{2})^{n-1}$

このようにしてN＝(0，0，1)に対し$\alpha(N)=(\xi,\ \eta,\ \zeta)$は（$\alpha$が(1)の形とすると）　$\zeta=(\frac{3}{2})^{n-1}\cos^n\nu+\cdots\cdots$となり，この右辺は（体$K(\sqrt{3})$に属する）代数的数を係数とする$\cos\nu$のn次の多項式となる．このことから出てくる結果は，もし$\cos\nu$がこの代数的数を係数としたどんな多項式の解にもならないなら（すなわち$\cos\nu$が超越数ならば）点N＝(0，0，1)は(1)の形のどんな変換によってもそれ自身には変換されず，そしてそのゆえに(1)の形の変換は単位（すなわち1）ではないということである．ところで数e^iが超越数であることを根拠にしてこの条件は$\nu=2$に対して成り立つ．よって軸ΦとΨの間の角が1である場合にたしかによいのである．

これまでに証明できたことは(1)の変換が1にならないように軸ΦとΨとの間の角をとりえたということである．

次に証明することは，これをもとにして(2)，(3)，(4)のどの変換も１にならないことを出すのである．形(2)の変換 β が１であると仮定する．$\beta=1$ としたので，明らかに　$\phi\beta\phi=\phi\phi=1$　さて(2)により $\phi\beta\phi$ は(1)の形をしているのは明白である．すぐ前に証明したことにより(1)のどの変換も１とならないから，これは不合理である．以上により(2)のどの変換も１ではない．

次に(4)の形の変換 δ が１であると仮定してみる．$\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{m_n}$を δ_nで表わす．もし $\delta_n=1$ ならば $\psi^{3-m_1}\delta_n\psi^{m_1}=1$　これより $\sigma=\phi\psi^{m_2}\phi\psi^{m_3}\cdots\cdots\phi\psi^{m_{n-1}}\phi\psi^{m_n+m_1}=1$　和 m_n+m_1は明らかに２か３か４という値のどれかである．もし $m_n+m_1=4$ か $m_n+m_1=2$ ならば変換 σ は(2)の形であるが，これは $\sigma=1$ ということと矛盾する．もし $m_n+m_1=3$ ならば，$\phi\sigma\phi=\psi^{m_2}\phi\psi^{m_3}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{m_{n-1}}$となるので $\phi\sigma\phi$ は(4)の形である（$\sigma=1$ かつ $\phi^2=1$ なので $\phi\sigma\phi=1$）．ここにこれは(4)で示したとおりの式ではないから δ にダッシをつけ，n が２だけ小さい場合であるから，これを δ'_{n-2}で表わす．δ_nを δ'_{n-2}に変形した手順を δ'_{n-2}に適用すると（$\delta'_{n-2}=1$ に注意）δ''_{n-4}という変換になり $\delta''_{n-4}=1$ である．この手順を有限回くりかえし，n を下げてゆくと $\delta^*_1=1$ または $\delta^*_2=1$ というものにまでなる．しかしこれは矛盾である，$\delta^*_1=\psi^p$で $p=1$ か $p=2$ だからである．一方，$\delta^*_2=1$ からは $\psi^p\phi\psi^q=1$ となり，$\phi=\psi^{-p-q}$ということになり，ϕ が１，ψ，ψ^2 と異なるということに矛盾する．これで(4)の形の変換は１でないことが証明された．

最後に(3)の形の変換 γ が１であると仮定する．$\gamma=1$ なので $\phi\gamma\phi=1$ となる．さて $\phi\gamma\phi=\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\cdots\phi\psi^{m_n}$または $\phi\gamma\phi=\phi$（γ が ϕ になった場合）．$\phi\neq1$ なので後の場合は起りえない．前の場合は $\phi\gamma\phi$ は(4)の形であり，すでに証明したように１ではない．これは $\phi\gamma\phi=1$ と矛盾する．以上により(3)の形のものは１ではない．

これまでの証明により（角 ν をあのようにとると）(1)，(2)，(3)，(4)のどの変換も１でない，つまり系列(G)のどの変換も最初のもの以外は１でないのである．このことより系列(G)のすべての変換が異なることになる（ただし角 ν は既述のように

とる）．それはなぜかというと(G)の項 σ と τ とが異なる場所にあって等しかった，$\sigma=\tau$ とする．これから $\sigma\tau^{-1}=1$ となる．まず τ は1ではない，もし1ならば $\sigma=1$ となり，σ と τ は共に最初に位置したことになりいけない．だから $\sigma=\tau\neq 1$ であり，σ と τ は(1)から(4)までの形をしている．よって

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma=\phi^k\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{m_n}\phi^l \\ \tau=\phi^r\psi^{q_1}\phi\psi^{q_2}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{q_p}\phi^s \end{cases}$$

ここに m_1，m_2，………，m_n，q_1，q_2，………q_p は1か2であり，k，l，r，s は0か1である．

$\sigma\tau^{-1}$ をつくると

$$\phi^k\psi^{m_1}\phi\psi^{m_2}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{m_n}\phi^l\phi^{-s}\psi^{-q_p}\phi\phi^{-q_{p-1}}\cdots\cdots\cdots\phi\psi^{-q_1}\phi^{-r}=1$$

変換(1)—(4)について証明したことにより，1になる上式の左辺は(1)から(4)までの変換ではない．このことより次の等式がすぐに出てくる．

$l=s$，$m_n=q_p$，$m_{n-1}=q_{p-1}$，………$m_1=q_1$，$k=r$

これにより，(7)をみれば σ と τ が系列(G)において同じ位置にあることになり，仮定に反する．よって系列(G)の変換はすべて異る．

注意としては，ϕ が点 $z_0=x_0+iy_0\neq 0$ の回りの角 π だけの平面の回転，ψ が平面の他の点，例えば $z_1=0$ の回りの角 $\frac{2}{3}\pi$ だけの平面の回転とすると系列(G)の変換はすべてが異るとはいえない．

$\phi(z)=2z_0-z$，$\psi(z)=\xi z$，$\xi=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ とすると $(\phi\psi)^6=1$ となる．

各類 G_n を帰納的に次のように3つの部分類 G'_n，G''_n，G'''_n に細分する．$G'_0=\{1\}$，$G''_0=G'''_0=O$ とする．ある正整数 n に対し，互いに素な部分類 G'_n，G''_n，G'''_n をすでに定めたと仮定する．それをもとにして G_{n+1} を G'_{n+1}，G''_{n+1}，G'''_{n+1} に細分しようというのである．G_{n+1} より任意の σ をとる．これに対して G_n の ρ が存在し次の3つの場合のどれか1つが成り立つように，一意的にきまる．

1)　$\sigma=\phi\rho$，ρ の最初の因子は ψ または ψ^2

2)　$\sigma=\psi\rho$, 3)　$\sigma=\psi^2\rho$　この2つの場合のρの最初の因子はϕ

1)の場合，$\rho\varepsilon G'_n$ならば$\sigma\varepsilon G''_{n+1}$とし$\rho\varepsilon G''_n+G'''_n$ならば$\sigma\varepsilon G'_{n+1}$とする．

2)の場合，$\rho\varepsilon G'_n$ならば$\sigma\varepsilon G''_{n+1}$とし$\rho\varepsilon G''_n$ならば$\sigma\varepsilon G'''_{n+1}$とし　$\rho\varepsilon G'''_n$ならば$\sigma\varepsilon G'_{n+1}$とする．

3)の場合，$\rho\varepsilon G'_n$ならば$\sigma\varepsilon G'''_{n+1}$とし　$\rho\varepsilon G''_n$ならば$\sigma\varepsilon G'_{n+1}$とし　$\rho\varepsilon G''_n$ならば$\sigma\varepsilon G''_{n+1}$とする．

以上の準備の下にGを互いに素なG′，G″，G‴に類別する．

$$G^{(i)}=G_0^{(i)}+G_1^{(i)}+G_2^{(i)}+\cdots\cdots\cdots \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

この類別の初めの方を示すと

G′	1		$\phi\psi$, $\phi\psi^2$, $\psi^2\phi$	$\phi\psi\phi$	………
G″		ϕ, ψ		$\phi\psi^2\phi$, $\psi\phi\psi$, $\psi\phi\psi^2$	………
G‴		ψ^2	$\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi$, $\psi^2\phi\psi^2$	………

一般にある変換の集合Kに対し，すべての変換$\sigma\rho$($\rho\varepsilon K$)の集合をσKで表わす．

ρがG′に属する場合．

$\rho\varepsilon G'_n$であるような整数$n\geqq 0$が存在する．$n=0$ならば$\rho=1$よって，$\phi\rho=\phi\varepsilon G''_1$，$\psi\rho=\psi\varepsilon G''_1$，$\psi^2\rho=\psi^2\varepsilon G'''_1$　$n\neq 0$ならば($G'_1=O$なので)$n\geqq 2$すると，$\rho_1\varepsilon G_{n-1}$が存在して次の3つの場合が可能である．

1)　$\rho=\phi\rho_1$　　ρ_1の最初の因子はψまたはψ^2

2)　$\rho=\psi\rho_1$, 3)　$\rho=\psi^2\rho_1$　　これらの場合ρ_1の最初の因子はϕ

そこで1)　$\rho=\phi\rho_1$ならば$\rho\varepsilon G'_n$であることを考慮し，G'_nの定義を使うと　$\rho_1 \varepsilon G''_{n-1}+G'''_{n-1}$　であることになる．したがって$\phi\rho=\rho_1\varepsilon G''_{n-1}+G'''_{n-1}$そして$G''_n$と$G'''_n$の定義によると　$\psi\rho\varepsilon G''_n$，$\psi^2\rho\varepsilon G'''_n$

2)　$\rho=\psi\rho_1$ならばG''_{n+1}の定義により$\phi\rho\varepsilon G''_{n+1}$かつ$\rho\varepsilon G'_n$であったので$G'_n$の定義から$\rho_1\varepsilon G''_{n-1}$となる．よって$\psi\rho=\psi^2\rho_1\varepsilon G''_n$，$\psi^2\rho=\rho_1\varepsilon G'''_{n-1}$

3)　$\rho=\psi^2\rho_1$ならば$\rho\varepsilon G'_n$であることを考慮すると$\rho_1\varepsilon G''_{n-1}$となる．よって$\phi\rho\varepsilon G''_{n+1}$，$\phi\rho=\rho_1\varepsilon G''_{n-1}$，$\psi^2\rho=\psi\rho_1\varepsilon G'''_n$

以上によりつねに$\phi\rho\varepsilon G''+G'''$，$\psi\rho\varepsilon G''$，$\psi^2\rho\varepsilon G'''$

したがって，ρはG′の任意の元であるから

(8)　$\phi G'\subset G''+G'''$，$\psi G'\subset G''$，$\psi^2 G'\subset G'''$

次にρがG″に属するとする．$\rho\varepsilon G''_n$であるような整数nが存在する．そしてある$\rho_1\varepsilon G_{n-1}$が存在し次の3つの場合が可能である：

1)　$\rho=\phi\rho_1$，2)　$\rho=\psi\rho_1$，3)　$\rho=\psi^2\rho_1$　後の2つに対してはρ_1の最初の因子はϕである．

1)　$\rho=\phi\rho_1$ならば$\rho\varepsilon G''_n$であることを考えると$\rho_1\varepsilon G'_{n-1}$となる，したがって$\psi\rho=\rho_1\varepsilon G'_{n+1}$かつ$\psi^2\rho\varepsilon G'_{n+1}$($G'_{n+1}$の定義による)

2)　$\rho=\psi\rho_1$ならば　$\rho_1\varepsilon G'_{n-1}$，したがって$\phi\rho\varepsilon G'_{n+1}$，$\psi^2\rho=\rho_1\varepsilon G'_{n+1}$

3)　$\rho=\psi^2\rho_1$ならば$\rho_1\varepsilon G'''_{n-1}$，したがって，$\phi\rho\varepsilon G'_{n-1}$，$\psi^2\rho=\psi\rho_1\varepsilon G'_n$これよりつねに$\phi\rho\varepsilon G'$

したがって

(9)　$\phi G''\subset G'$，$\psi^2 G''\subset G'$

よって　$G''=\psi^3 G''\subset\psi G'$

最後に$\rho\varepsilon G'''$ならば，ある整数nに対して$\rho\varepsilon G'''_n$となる．そして次の3つの場合が可能であるような$\rho_1\varepsilon G_{n-1}$が存在する：

1)　$\rho=\phi\rho_1$，2)　$\rho=\psi\rho_1$，3)　$\rho=\psi^2\rho_1$，ただしρ_1の最初の因子については前と同じ条件がある．

1) $\rho=\phi\rho_1$ならばG'_n, G''_nの定義により，ある$\rho\varepsilon G'_n+G''_n$が存在することになるが，これは$\rho\varepsilon G'''_n$と矛盾する．よってこの場合はありえない．

2) $\rho=\psi\rho_1$ならば$\rho\varepsilon G'''_n$より$\rho_1\varepsilon G''_{n-1}$となる．よって$\phi\rho\varepsilon G'_{n+1}$かつ$\psi\rho=\psi^2\rho_1$ $\varepsilon G'_n$

3) $\rho=\psi^2\rho_1$ならば$\rho_1\varepsilon G'_{n-1}$これより$\phi\rho\varepsilon G'_{n+1}$かつ$\psi\rho=\rho_1\varepsilon G'_{n-1}$よってつねに$\phi\rho\varepsilon G'$，$\psi\rho\varepsilon G'$となり

したがって

(10) $\phi G'''\subset G'$，$\psi G'''\subset G'$

よって　$G'''=\psi^3 G'''\subset\psi^2 G'$

式(8), (9), (10)よりただちに

(11) $\phi G'=G''+G'''$，$\psi G'=G''$，$\psi^2 G'=G'''$

運動を幾何学的に考えると，物体がその1点を不動に保って運動すると，その運動はその固定点を通るある軸の回りの(ある角度の)回転に等値になる．

Gの1でない各変換に対して，等値の回転の軸が対応する．軸は与えられた球面と2点（極）で変わる．変換の集合Gは可算であるから，すべての極の集合Dもまた可算である．球の中心を通る軸の回りの回転(単位変換すなわち2πの倍数の角の回転は除く）は球面のただ2点つまり当該回転の2つの極だけを不動に保つ．

結論は，球面のどの点も，集合Dの点以外は系列(G)のどんな変換に対しても不動でない，勿論，単位変換1に対しては別である．Gは変換群であるから次のように表わされる．

(12) $\sigma(p)\neq\sigma'(p)$ $(p\varepsilon S-D$，$\sigma\varepsilon G$，$\sigma'\varepsilon G$，$\sigma\neq\sigma')$

実際，ある$p\varepsilon S-D$とGに属するσ，σ'に対して$\sigma(p)=\sigma'(p)$であったとすると，$\sigma'\sigma^{-1}(p)=p$となる．これから$\sigma'\sigma^{-1}=1$となり$(p\varepsilon S-D$なので$p\notin D)$これよ

り $\sigma=\sigma'$ これは矛盾である.

系列 G の任意の変換によって S−D の点からえられるすべての点の集合を $G(p)$ とかく，すなわち

$G(p)=\{p\}+\{\phi(p)\}+\{\psi(p)\}+\{\psi^2(p)\}+\{\psi\phi(p)\}+\cdots\cdots\cdots$

これを略記すれば　$G(p)=\sum_{\sigma\epsilon G}\{\sigma(p)\}$

系列 $G(p)$ のすべての項は S の異る点からなる.

さて p と p′ を S−D の 2 つの異る点とする．すると

(13)　$G(p)=G(p')$ であるかまたは $G(p)G(p')=O$ である.

実際 $G(p)G(p')\neq O$ ならば $\sigma_0(p)=\sigma_0'(p')$ であるような G の 2 つの変換 σ_0 と σ_0' がある.

これより $\sigma\epsilon G$ に対して

$$\sigma(p)=\sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0(p)=\sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0'(p')$$

となる. $\sigma'=\sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0'$ とおくと $\sigma'\epsilon G$ かつ $\sigma(p)=\sigma'(p')$ であることがわかり，これは $\sigma\epsilon G$ に対し $\sigma(p)\epsilon G(p')$ であることを示していて，これから $G(p)\subset G(p')$ となる．同様にして $G(p')\subset G(p)$ も出るので $G(p)=G(p')$ となる.

さて集合 S−D のすべての点を類別する，すなわち S−D の 2 点 p と p′ が同じ類に入るのは $G(p)=G(p')$ の場合であるとする．すると集合 S−D は互いに素なる（可算）類に類別される.

Zermelo の公理により，これらの各類からただ 1 個づつとった元よりなる集合 M が存在する．簡明に表わすと

$$S-D=\sum_{\sigma\epsilon G}\sigma(M)=M+\phi(M)+\psi(M)+\psi^2(M)+\psi\phi(M)+\cdots\cdots\cdots$$

すぐわかることは，これらの系列の各項は互いに素なる集合である．実際，$\sigma\epsilon G$, $\sigma'\epsilon G$, $\sigma\neq\sigma'$ に対し $\sigma(M)\sigma'(M)\neq O$ と仮定する．するとある $p\epsilon M$ と $p'\epsilon M$ とが

存在し，$\sigma(p)=\sigma'(p')$となる．これから$G(p)=G(p')$となり，$p\epsilon M$, $p'\epsilon M$であることを考えると集合Mの定義から$p=p'$，これから$\sigma(p)=\sigma'(p)$が出る．これは(12)に矛盾する．$M\subset S-D$だからである．

(14) $A=\sum_{\sigma\epsilon G'}\sigma(M)$，$B=\sum_{\sigma\epsilon G''}\sigma(M)$，$C=\sum_{\sigma\epsilon G'''}\sigma(M)$

とおく．

$G=G'+G''+G'''$はGを互いに素なる3つの類に類別したのだから(14)は$S-D$を3つの互いに素なる集合に分解したことになる．

(15) $S-D=A+B+C$

(14)と(11)よりただちに

(16) $\phi(A)=B+C$, $\psi(A)=B$, $\psi^2(A)=C$

なおこれに加えて$\phi(D)=D$, $\psi(D)=D$

(16) より

(17) $A\cong B\cong C\cong B+C$

(17)は何を意味するかというと，$B+C$は3次元空間において非可算の有界集合であり，それ自身と合同な2つの互いに素な集合の和となっているということである．

追記　この逆理は球面上の測度について大変困った結果をもたらした．それゆえ人々は選択公理を認めるのに用心深くならざるをえなくなった．これを思えば，この古い定理は大きな影を数学に落している．しかし多くの人はこの定理の存在によって選択公理を拒否しようとまでは思わない．それに急流のような現代数学の世界でこの古い問題に関心をよせようとする閑人は少ない．そのためか我が国でこの定理を詳説した成文をみない．

なおこの定理の簡潔な解説とその及ぼした影響が次の著書にのっている．

Gregory H. M. ZERMELO'S AXIOM OF CHOICE Springer 1982, pp 185-188