ω-star-free minimal sets の LANDWEBER の階層に占める位置について

高　橋　信　行

§1. はじめに

正則表現を定義する演算のうち，Kleene 閉包を取り除いて star-free regular expression の概念が得られる。star-free regular expression で表わされる言語を star-free regular set といい，star-free regular sets の全体を SF で表わすことにする。

Thomas〔9〕では，この star-free regular sets の概念を ω 型に拡張して，ω-star-free regular sets のクラス SF^{ω} を得ている。

一方，Landweber〔4〕では有限オートマトンによる ω-sequence の受理方式として1，1′，2，2′および 3-acceptance という 5 つの方法を挙げ，これらの受理方式が所謂，LANDWEBER の階層 $\boldsymbol{O}_1$，$\boldsymbol{O}_2$，$\boldsymbol{O}_3$，$\boldsymbol{O}_4$および ω-regular sets の全体 REG^{ω} を構築することを示している。(Kobayashi, Takahashi, and Yamasaki〔3〕では，machine-independant approach により同じ概念を得ている。)

さて，$SF^{\omega} \subseteq REG^{\omega}$ であるが，REG^{ω} のサブクラス $\boldsymbol{O}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$

と SF^{ω} の関係はどう位置付けられるのであろうか。この問いに対する解答は Kobayashi, Takahashi, and Yamasaki〔3〕で与えられているが，この文献を知る以前に筆者は SF^{ω} と特に $\boldsymbol{O}_3$ との関係を調べる間に ω-star-free minimal sets の概念を得た。ω-star-free minimal sets の全体を SF^{ω}_{m} で表わすと，$SF^{\omega}_{m} \subseteq \boldsymbol{O}_3$ であることが証明できる。本稿では，この結果の machine-oriented proof を示し，別の稿で述べる予定の Meyer〔6〕の結果の ω 型言語への拡張における補助定理として位置付けることにしたい。

本稿では，第2節で star-free regular set, Borel hierarchy 等に関する諸定義を与え，第4節にて $SF^{\omega}_{m} \subseteq \boldsymbol{O}_3$ の証明を与えるが，そのための準備として，第3節て $\boldsymbol{O}_3$ の特徴付けを行なう。第4節での $SF^{\omega}_{m} \subseteq \boldsymbol{O}_3$ の証明は竹内〔8〕における〝縮約〟の方法をヒントに得たものである。第5節で今後の課題を検討する。

§2. 記号と準備

定義2．1　$\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$ を有限オートマトンという。ただし

(i)　S は，状態の空でない有限集合。

(ii)　Σ は，アルファベットの空でない有限集合。

(iii)　$s_0 \in S$ は初期状態。

(iv)　M は，$S \times \Sigma^*$ から S への関数で状態遷移関数と呼ばれる。

(v)　$F \subseteq S$ は，終端状態集合である。

定義2.1の直観的意味は，以下の通りである。

例2．2　$\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$ として，次のものを考える。

$S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

$M(s_0, 0) = s_1$　　$M(s_1, 0) = s_2$　　$M(s_2, 0) = s_2$

$M(s_0,\ 1)=s_0 \qquad M(s_1,\ 1)=s_0 \qquad M(s_2,\ 1)=s_2$

$F=\{s_2\}$

Σ 上の語の全体を Σ^* で表わす。Σ^* の語のうち，00 を含む語達，たとえば 1101001 とか 010001 だけを，この有限オートマトンは受理する。その様子を図2-1に示す。

1	1	0	1	0	0	1			
s_0	s_0	s_0	s_1	s_0	s_1	s_2	s_2	$\in$	F

0	1	0	0	0	1			
s_0	s_1	s_0	s_1	s_2	s_2	s_2	$\in$	F

図 2—1

そうでない列，たとえば 0101101 などは受理されない。

0	1	0	1	1	0	1			
s_0	s_1	s_0	s_1	s_0	s_0	s_1	s_0	$\notin$	F

図 2—2

このことを　$T(\mathfrak{A})=\{x00y|x,y\epsilon\Sigma^*\}$　と書く。一般的に，有限オートマトン $\mathfrak{A}$ が受理する言語は次のように定義される。

$T(\mathfrak{A})=\{x\epsilon\Sigma^*|M(s_0,\ x)\epsilon F\}$

有限オートマトンによって受理される言語の全体を *regular sets* のクラスといい，*REG* で表わす。

regular set の概念は，次のような Machine-independant approach によっても定義できる。

定義2．3　A，B を Σ^* の部分集合とする。

(i)　A，B の *concatenation* AB とは次の集合である。

$AB=\{xy|x\epsilon A,\ y\epsilon B\}$

A の i 個の concatenation を A^i で表わす。$(i\geq 0)$

(ii) A, B の *union* $A \cup B$ とは次の集合である。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

(iii) A の Kleene 閉包 A^*とは，次のような集合である。

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$$

ただし，$A^0 = \{\varepsilon\}$。ε は長さ 0 の語である。

Σ^*の部分集合を（Σ 上の）言語といい，その元を語という。

定義2．4

(i) ϕ および $\{a\}$ $(a \in \Sigma)$ は，*regular set* である。

(ii) A, B が *regular set* のとき，AB, $A \cup B$, A^*は *regular set* である。

(iii) (i)，(ii) の手続きによって与えられるもののみが，*regular set* である。

regular sets のクラス *REG* は，ブール演算の下で閉じていることが証明される。さて，定義 2．4 での A から A^*を得る Kleene 閉包を取り去って，次のような *REG* のサブクラスを得ることができる。

定義2．5

(i) ϕ, $\{a\}$ $(a \in \Sigma)$ は *star-free regular set* である。

(ii) U, V が *star-free regular set* のとき，UV, $U \cup V$, $\bar{U}$ は *star-free regular set* である。

(iii) (i)，(ii) の手続きによって得られるもののみが *star-free regular set* である。

star-free regular sets の全体を *SF* で表わす。

次に，無限語を元とする集合，ω-language について考える。

無限語 α とは，次の形に書けるものである。

$$\alpha = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots\cdots \quad \text{各 } \sigma_i \in \Sigma$$

すなわち，0番目にどの文字が来て，1番目にどの文字が来て，……という具合いに，自然数全体 ω から Σ への対応の仕方を述べたものである。よって α は，次のように書ける。

$$\alpha : \omega \to \Sigma$$

ω から Σ への関数の全体は，Σ^{ω} と書かれるので Σ 上の無限語の全体も Σ^{ω} と書くことにする。無限語 $\alpha=\sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\cdots$ の先頭 n 文字で構成される有限語を $\alpha(0,\ n)$ で表わし，無限語 $\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\cdots$ を $\alpha(n, \infty)$ で表わす。

次に Landweber〔4〕で与えられた有限オートマトンによる無限語の5通りの受理方式を考える。

定義2．6　無限語 $\alpha=\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\cdots$ が有限オートマトン $\mathfrak{A}=(S, \Sigma, s_0, M, F)$ に入力されると，α を見て行く間に出現する S の状態の無限列 $s_0s_1s_2\cdots\cdots$ が引き起こされる。ただし，各 $i \geq 0$ に対し $s_{i+1}=M(s_i,\ \sigma_i)$ である。状態の無限列 $s_0s_1s_2\cdots\cdots$ を $\mathrm{Run}(\alpha)$ で表わし，$\mathrm{Run}(\alpha)$ で起こったすべての状態の集合を $\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}$ で，$\mathrm{Run}(\alpha)$ で無限回，出現したすべての状態の集合を $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}$ で表わすことにする。特に機械 $\mathfrak{A}$ を明示したいときは，$\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha,\ \mathfrak{A})}}$ と書く。

このとき

α が $\mathfrak{A}$ によって 1-*accept* される。$\Longleftrightarrow$ $\underline{\mathrm{Run}(\alpha)} \cap F \neq \phi$

α が $\mathfrak{A}$ によって 1′-*accept* される。$\Longleftrightarrow$ $\underline{\mathrm{Run}(\alpha)} \subseteq F$

α が $\mathfrak{A}$ によって 2-*accept* される。$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \cap F \neq \phi$

α が $\mathfrak{A}$ によって 2′-*accept* される。$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \subseteq F$

α が $\mathfrak{A}$ によって 3-*accept* される。$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \in \mathscr{F}$（ただし $\mathscr{F} \subseteq 2^S$）

として5通りの受理方式(acceptance)を定め，1-accept される言語のクラスを $\boldsymbol{O}_1$，1′-accept される言語のクラスを $\boldsymbol{O}_2$，2-accept される言語のクラスを $\boldsymbol{O}_3$，2′-accept される言語のクラスを $\boldsymbol{O}_4$，3-accept される言語のクラスを $\boldsymbol{O}_5$ で表わすことにする。ここで，3-acceptance の場合は有限オートマト

ンは，$\mathfrak{A}=(S, \Sigma, s_0, M, \mathscr{F})$，$\mathscr{F}\subseteq 2^S$であり，この機械を特に Muller オートマトンという。また有限オートマトン$\mathfrak{A}$によってi-accept される ω-言語を $T_i^\omega(\mathfrak{A})$ と書くことにする。($i=1$, $1'$, 2, $2'$, 3)

定義2．7　$A\subseteq\Sigma^\omega$ が *ω-regular set* とは，適当な $m \geq 1$ と regular sets $U_1, \cdots, U_m, V_1, \cdots, V_m \subseteq \Sigma^*$が存在して

$$A=\bigcup_{i=1}^{m} U_i V_i^\omega$$

と書けることである。ここに $V \subseteq\Sigma^*$に対し

$$V^\omega = \{x_0x_1x_2\cdots\cdots\in\Sigma^\omega \mid 各\ i\geq 0\ に対し\ x_i\in V\}$$

である。

ω-regular setsの全体を REG^ω と書く。

有限長言語 $V \subseteq\Sigma^*$から無限長言語 $V^\omega \subseteq \Sigma^\omega$ を作る操作を上に示したが，このような手続きをもう１つ示す。

$V \subseteq\Sigma^*$に対し

$$\lim V=\{\alpha\in\Sigma^\omega \mid \forall i\,\exists j\geq i\ \ \alpha(0,j)\in V\}$$

を定める。

Aが ω-regular set であるための必要十分条件は，適当な $m \geq 1$, regular sets $U_1, \cdots, U_m, V_1, \cdots, V_m\subseteq\Sigma^*$ が存在して

$$A=\bigcup_{i=1}^{m} U_i \lim V_i$$

と書けることであることが Choueka〔2〕によって知られている。また，3-acceptance 有限オートマトンによって受理される無限語の集合が作る族は，REG^ω に一致することが McNaughton〔5〕によって，非決定性の2-acceptance 有限オートマトンによって受理される無限語の集合が作る族も REG^ω に一致することが，Büchi〔1〕によってそれぞれ知られている。これらの結果と高橋〔7〕，竹内〔8〕などによって次の補助定理が得られる。

補助定理2．8　REG^{ω} は finite union, finite intersection の下で閉じている。

さて，次に low level の Borel hierarchy について考察する。

定義2．9　$\Sigma^{*}\cup\Sigma^{\omega}$ 上の partial order $<$ を次のように定める。

$$\alpha(0,\ i)<\alpha(0,\ j)<\alpha \overset{def}{\iff} i<j<\omega$$

このとき，$\alpha(0,\ i)$ は $\alpha(0,\ j)$，α の *prefix*，$\alpha(0,\ j)$ は α の *prefix* であるという。従って $\lim V$ は，その無限個の prefix が V の元になっているような無限語の集合である。

$x\in\Sigma^{*}$ に対して，　$N_x=\{\alpha\in\Sigma^{\omega}|x<\alpha\}$　とおく。$A\subseteq\Sigma^{\omega}$ が Σ^{ω} における *open set* であるとは適当な $B\subseteq\Sigma^{*}$ について $A=\bigcup_{x\in B}N_x$ と書けることであるとして Σ^{ω} に位相を入れる。すなわち集合系 $\{N_x \mid x\in\Sigma^{*}\}$ は Σ^{ω} 上の直積位相に関する基底になっている。このようにして位相が定められた空間を *Baire space* という。集合 A が *closed set* であるとは，A の補集合 $\bar{A}$ が open set であることである。

以下のように effectively に構成される集合族を *Borel sets* という。Borel sets 達は，階層構造をもっており，これを *Borel hierarchy* という。

$G_0(=F_0)=\ \{L\subseteq\Sigma^{\omega} \mid L \text{ は open かつ closed}\}$

$G_1=\ \{L \mid L \text{ は open set}\}$

$F_1=\ \{L \mid L \text{ は closed set}\}$

$G_2=\{\bigcap_{i=0}^{\infty}L_i | \forall i\geq 0\ \ L_i\in G_1\}$

$F_2=\{\bigcup_{i=0}^{\infty}L_i | \forall i\geq 0\ \ L_i\in F_1\}$

$G_3=\{\bigcup_{i=0}^{\infty}L_i | \forall i\geq 0\ \ L_i\in G_2\}$

$F_3=\{\bigcap_{i=0}^{\infty}L_i | \forall i\geq 0\ \ L_i\in F_2\}$

⋮

Borel hierarchy は図2－3で，その階層関係を示すことができる。

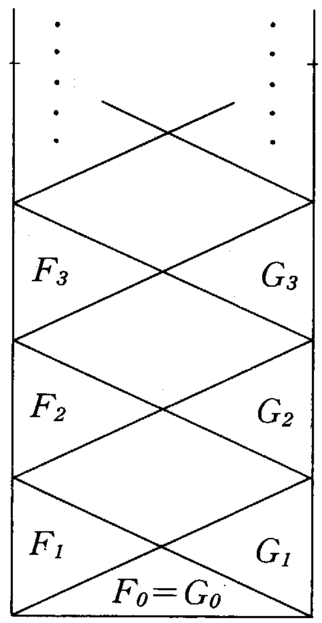

図2－3

ここで次の補助定理を掲げておく。

補助定理2．10　各F_i，G_iは finite union, finite intersection の下で閉じている。

〔証明〕　F_iはG_iと dual であるから，G_iについて証明を行なう。

まず，G_0は clopen sets のクラスであるから Basis は明らか。

G_iについて主張が成り立つと仮定して，G_{i+1}について証明する。iが奇数のときも以下のように証明できるので，iは偶数としておく。$A, B \in G_{i+1}$をとると $A=\bigcup_j L(j)$，$B=\bigcup_k M(k)$ と書けて $L(j)$，$M(k) \in G_i$である。このとき

$$A \cap B=\bigcup_j L(j) \cap \bigcup_k M(k)$$
$$=\bigcup_i (L((i)_0) \cap M((i)_1))$$

ただし，$i=2^j \cdot 3^k$で$(i)_0=j$，$(i)_1=k$ である。Induction Hypothesis より $L((i)_0) \cap M((i)_1) \in G_i$であるから $A \cap B \in G_{i+1}$。

一方
$$A \cup B=\bigcup_j L(j) \cup \bigcup_k M(k)$$
$$=\bigcup_i (L(i) \cup M(i))$$

やはり Induction Hypothesis より $L(i) \cup M(i) \in G_i$ よって $A \cup B \in G_{i+1}$

である。$\boxtimes$

§3. 2-acceptance

前節では定義2.6において無限語の acceptance を，定義2.9において Borel sets をそれぞれ定義したが，両者の間には密接な関係がある。

定義2.6をもう１度見てみることによって，次の事実がわかる。

$L \in \boldsymbol{O}_1$ *iff* $L = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \exists x < \alpha \quad M(s_0, x) \in F\}$

for some $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$

$L \in \boldsymbol{O}_2$ *iff* $L = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \forall x < \alpha \quad M(s_0, x) \in F\}$

for some $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$

$L \in \boldsymbol{O}_3$ *iff* $L = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \forall x < \alpha \exists y \, [x < y < \alpha \wedge M(s_0, y) \in F]\}$

for some $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$

$L \in \boldsymbol{O}_4$ *iff* $L = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \exists x < \alpha \forall y \, [x < y < \alpha \Rightarrow M(s_0, y) \in F]\}$

for some $\mathfrak{A} = (S, \Sigma, s_0, M, F)$

従って，各$\boldsymbol{O}_i$の定義を次のように書き換えることができる。

定義3. 1

(i) $L \in \boldsymbol{O}_1 \Longleftrightarrow \alpha \in L$ *iff* $\exists x < \alpha \, [x \in A]$ *for some regular set* A

(ii) $L \in \boldsymbol{O}_2 \Longleftrightarrow \alpha \in L$ *iff* $\forall x < \alpha \, [x \in A]$ *for some regular set* A

(iii) $L \in \boldsymbol{O}_3 \Longleftrightarrow \alpha \in L$ *iff* $\forall x < \alpha \exists y \, [x < y < \alpha \wedge y \in A]$ *for some regular set* A

(iv) $L \in \boldsymbol{O}_4 \Longleftrightarrow \alpha \in L$ *iff* $\exists x < \alpha \forall y \, [x < y < \alpha \Rightarrow y \in A]$ *for some regular set* A

ここで再び Borel sets の定義を見てみよう。定義3.1で$\boldsymbol{O}_1 \sim \boldsymbol{O}_4$の定義を quantifier を用いて記述したが，Borel sets の定義に対しても同じことを試みる。その結果，Borel sets の定義を次のように書き換えることができる。

(a) $L\epsilon \boldsymbol{G}_1 \Longleftrightarrow \alpha\epsilon L$ *iff* $\exists x<\alpha$ 〔$x\epsilon A$〕 *for some* $A\subseteq\Sigma^*$

(b) $L\epsilon \boldsymbol{F}_1 \Longleftrightarrow \alpha\epsilon L$ *iff* $\forall x<\alpha$ 〔$x\epsilon A$〕 *for some* $A\subseteq\Sigma^*$

(c) $L\epsilon \boldsymbol{G}_2 \Longleftrightarrow \alpha\epsilon L$ *iff* $\forall x<\alpha\exists y$ 〔$x<y<\alpha\wedge y\epsilon A$〕 *for some* $A\subseteq\Sigma^*$

(d) $L\epsilon \boldsymbol{F}_2 \Longleftrightarrow \alpha\epsilon L$ *iff* $\exists x<\alpha\forall y$ 〔$x<y<\alpha \Rightarrow y\epsilon A$〕 *for some* $A\subseteq\Sigma^*$

定義3.1の(i) (ii) (iii) (iv) と上述の (a) (b) (c) (d) の類似点には注目する必要がある。相異点は, L から決まる集合 A が定義3.1においては, regular set であり, (a) (b) (c) (d) においては, その要請がないということである。実際に(i) (ii) (iii) (iv) と (a) (b) (c) (d) の間には, 次のような関係がある。(Kobayashi, Takahashi, and Yamasaki〔3〕)

$$\boldsymbol{O}_1=G_1\cap REG^{\omega}$$

$$\boldsymbol{O}_2=F_1\cap REG^{\omega}$$

$$\boldsymbol{O}_3=G_2\cap REG^{\omega}$$

$$\boldsymbol{O}_4=F_2\cap REG^{\omega}$$

次節では特に$\boldsymbol{O}_3$について考察するので以下, $\boldsymbol{O}_3=G_2\cap REG^{\omega}$ の証明を論ずる。まず, 以下の補助定理達を用意する。

補助定理3.2 $A\epsilon\boldsymbol{O}_3\Rightarrow\bar{A}\epsilon\boldsymbol{O}_4$

〔証明〕 $A\epsilon\boldsymbol{O}_3$とすると $A=T_2^{\mathscr{G}}(\mathfrak{A})$ となる有限オートマトン $\mathfrak{A}=(S,\Sigma, s_0, M, F)$がある。$\mathfrak{B}=(S, \Sigma, s_0, M, \bar{F})$とおく。

このとき, $\alpha\epsilon A$ *iff* $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}\cap F\neq\phi$

iff $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}\not\subseteq\bar{F}$

iff $\alpha\notin T_{2'}^{\mathscr{G}}(\mathfrak{B})$

iff $\alpha\epsilon\overline{T_{2'}^{\mathscr{G}}(\mathfrak{B})}$

従って $A=\overline{T_{2'}^{\mathscr{G}}(\mathfrak{B})}$。すなわち $\bar{A}=T_{2'}^{\mathscr{G}}(\mathfrak{B})\epsilon\boldsymbol{O}_4$ ☒

補助定理3.3 $\boldsymbol{O}_4\subseteq REG^{\omega}$

〔証明〕 $REG^{\omega}=\boldsymbol{O}_5$であるから, 2'-accept される ω-language が 3-accept されることを言えばよい。$A\epsilon T_{2'}^{\mathscr{G}}(\mathfrak{A})$とする。ただし, $\mathfrak{A}=(S, \Sigma, s_0, M, F)$。次のような有限オートマトン$\mathfrak{B}$をつくる。$\mathfrak{B}=(S,\Sigma, s_0, M, \mathscr{F})$た

だし，$\mathscr{F}=2^F$。このとき $T_2^\omega(\mathfrak{A}) = T_3^\omega(\mathfrak{B})$ である。

実際に，$\alpha\in T_2^\omega(\mathfrak{A})$ iff $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \subseteq F$

iff $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \in \mathscr{F}$

iff $\alpha\in T_3^\omega(\mathfrak{B})$

従って $A\in REG^\omega$ $\boxtimes$

補助定理3．4 REG^ω は補集合をとる演算の下で閉じている。

〔**証明**〕 $A\in \boldsymbol{O}_5$ ならば $\bar{A}\in \boldsymbol{O}_5$ であることが言えればよい。$A\in T_3^\omega(\mathfrak{A})$ とする。ただし $\mathfrak{A}=(S, \Sigma, s_0, M, \mathscr{F})$。$\mathfrak{A}$ から次なる $\mathfrak{B}$ をつくる。

$\mathfrak{B}=(S, \Sigma, s_0, M, \overline{\mathscr{F}})$ このとき

$\alpha\in\bar{A}$ iff $\alpha\in\overline{T_3^\omega(\mathfrak{A})}$

iff $\alpha\notin T_3^\omega(\mathfrak{A})$

iff $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \notin \mathscr{F}$

iff $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}} \in \overline{\mathscr{F}}$

iff $\alpha\in T_3^\omega(\mathfrak{B})$

よって $\bar{A}=T_3^\omega(\mathfrak{B})\in\boldsymbol{O}_5$ $\boxtimes$

定理3．5 $\boldsymbol{O}_3\subseteq REG^\omega$

〔**証明**〕 $A\in \boldsymbol{O}_3 \Rightarrow \bar{A}\in \boldsymbol{O}_4$ （補助定理3.2）

$\Rightarrow \bar{A}\in REG^\omega$ （補助定理3.3）

$\Rightarrow A\in REG^\omega$ （補助定理3.4） $\boxtimes$

定理3．6 $\boldsymbol{O}_3\subseteq G_2\cap REG^\omega$

〔**証明**〕 $L\in \boldsymbol{O}_3$ を任意にとると或る有限オートマトン $\mathfrak{A}=(S, \Sigma, s_0, M, F)$ が存在して，$L=T_2^\omega(\mathfrak{A})$ である。今，各 $x\in\Sigma^*$ に対して

$A_x=\{\alpha\in\Sigma^\omega \mid x<\alpha \Rightarrow \exists y\,[x<y<\alpha \wedge M(s_0, y)\in F]\}$

とおくと

$\alpha\in A_x$ iff $x<\alpha \Rightarrow \exists y<\alpha\,[x<y \wedge M(s_0, y)\in F]$

iff $\exists y<\alpha\,[x<\alpha \Rightarrow (x<y \wedge M(s_0, y)\in F)]$

ここで

$$B_x = \{y \epsilon \Sigma^* \mid x < \alpha \Rightarrow (x < y \wedge M(s_0, y) \epsilon F)\}$$

とおくと

$$\alpha \epsilon A_x \ \mathit{iff} \ \exists y < \alpha \ [y \epsilon B_x]$$

$$\mathit{iff} \ \alpha \epsilon \bigcup_{y \epsilon B_x} N_y$$

従って $A_x = \bigcup_{y \epsilon B_x} N_y$ と書けて，A_x は open set である。しかも $L = \bigcap_{x \epsilon \Sigma^*} A_x$ である。

何となれば

$$\alpha \epsilon L \ \mathit{iff} \ \forall x < \alpha \ \exists y \ [x < y < \alpha \ \wedge M(s_0, y) \epsilon F]$$

$$\mathit{iff} \ \forall x \epsilon \Sigma^* \ [x < \alpha \Rightarrow \exists y (x < y < \alpha \ \wedge M(s_0, y) \epsilon F)]$$

$$\mathit{iff} \ \forall x \epsilon \Sigma^* \ [\alpha \epsilon A_x]$$

$$\mathit{iff} \ \alpha \epsilon \bigcap_{x \epsilon \Sigma^*} A_x$$

従って $L \epsilon G_2$ であり，定理3.5より $L \epsilon REG^\omega$ である。

すなわち $L \epsilon G_2 \cap REG^\omega$ ☒

次に定理3.10 $G_2 \cap REG^\omega \subseteq \boldsymbol{O}_3$ の証明のための補助定理を2つ挙げる。1つはlandweber〔4〕の中から，そのまま引用する。

補助定理3．7 (Landweber〔4; Lemma2.2〕)

$A \epsilon G_2 \ \mathit{iff} \ \exists B \subseteq \Sigma^*$ s.t

$$\alpha \epsilon A \Longleftrightarrow \exists v_1 < v_2 < \cdots \forall i \geq 1 [v_i \epsilon B, \ v_i < \alpha]$$

〔証明〕 略

若干の定義を置く。以下，$\mathfrak{M} = (S, \Sigma, s_0, M, \mathscr{D})$ は3-acceptanceの有限オートマトンとする。

定義3．8 (a) $\mathscr{R}(x, y) = \{M(s_0, z) \mid x \leq z \leq y\}$ を区間 x，y の状態路という。$\mathscr{R}(x, y)$ は $x \leq y$ のときのみ定義される。

(b) $q \epsilon S$ に対し

$$\mathscr{H}_q = \{\mathscr{R}(x, y) \mid M(s_0, x) = M(s_0, y) = q, \ x, \ y \epsilon \Sigma^*\}$$

を定める。これをrealizable cycleの集合という。

補助定理3．9 $T_3^{\mathscr{G}}(\mathfrak{M})\epsilon G_2$, $s\epsilon S$, $D\epsilon\mathscr{D}\cap\mathscr{H}_s$, $E\epsilon\mathscr{H}_s\Rightarrow D\cup E\epsilon\mathscr{D}$

〔**証明**〕 $T_3^{\mathscr{G}}(\mathfrak{M})\epsilon G_2$ であるから，補助定理3.7により或る $B\subseteq\Sigma^*$ が存在して

$$\alpha\epsilon T_3^{\mathscr{G}}(\mathfrak{M}) \Longleftrightarrow \exists v_1<v_2<\cdots\forall i\geq 1\ [v_i\epsilon B,\ v_i<\alpha] \qquad (1)$$

である。

さて，$D\epsilon\mathscr{H}_s$ であるから

$$M(s_0,\ x)=M(s_0,\ xy_1)=s,\quad \mathscr{R}(x,\ xy_1)=D \qquad (2)$$

なる x, $y_1\epsilon\Sigma^*$ がとれる。

いま，$\beta=xy_1^{\mathscr{G}}$ とおくと $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\beta)}}=D\epsilon\mathscr{D}$ であるから $\beta\epsilon T_3^{\mathscr{G}}(\mathfrak{M})$。

(1)により

$$\exists u_1<u_2<\cdots\cdots\forall i\geq 1\ [u_i\epsilon B,\ u_i<\beta]$$

そこでこの u_1 に注目すると，$u_1<\beta$ であるから $u_1<xy_1^{l_1}$ なる $l_1\geq 0$ が存在する。この $y_1^{l_1}$ を改めて y_1 とおいても(2)は成り立つから，この u_1 を z_1 とすれば

$$z_1<xy_1 \text{ で } z_1\epsilon B \qquad (3)$$

である。

次に $E\epsilon\mathscr{H}_s$ であるから

$$M(s_0,\ xy_1w_1)=s,\quad \mathscr{R}(xy_1,\ xy_1w_1)=E$$

となる $w_1\epsilon\Sigma^*$ が得られる。

再び $D\epsilon\mathscr{H}_s$ であるから

$$\left.\begin{array}{l} M(s_0,\ xy_1w_1)=M(s_0,\ xy_1w_1y_2)=s \\ \mathscr{R}(xy_1w_1,\ xy_1w_1y_2)=D \end{array}\right\} \qquad (4)$$

をみたす y_2 が得られる。

$\beta'=xy_1w_1y_2^{\mathscr{G}}$ とすれば，前述と同様に $\beta'\epsilon T_3^{\mathscr{G}}(\mathfrak{M})$。再び(1)により

$$\exists v_1<v_2<\cdots\cdots\forall i\geq 1\ [v_i\epsilon B,\ v_i<\beta'] \qquad (5)$$

である。

(3)で確定したz_1とv_1, v_2, ……の大小を比較する。$z_1<\beta'$, 各$v_i<\beta'$であるからz_1と各v_iとは比較可能である。(5)のv_iで$z_1<v_i$なる最小のiを考えると前述同様$v_i<\beta'$から$v_i<xy_1w_1y_2^{l_2}$なる$l_2\geq 0$がとれる。この$y_2^{l_2}$をy_2で置き換えても(4)は成り立つから，このv_iをz_2とすれば

$$z_1<z_2<xy_1w_1y_2,\ \ z_2\epsilon B$$

である。

更に，$E\epsilon\ \mathscr{H}s$ により

$$M(s_0,\ xy_1w_1y_2)=M(s_0,\ xy_1w_1y_2w_2)=s$$

$$\mathscr{R}(xy_1w_1y_2,\ xy_1w_1y_2w_2)=E$$

なるw_2がとれる。以後，同様に$y_i, z_i, w_i\ (i\geq 3)$がとれて$\alpha=xy_1w_1y_2w_2\cdots$とおくと$\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}=D\cup E$であって

$$\exists z_1<z_2<\cdots\cdots\forall i\geq 1\ [z_i\epsilon B,\ \ z_i<\alpha]$$

が成り立っているから，(1)により$\alpha\epsilon\ T_3^{\omega}(\mathfrak{M})$である。

従って$\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}=D\cup E\ \epsilon\ \mathscr{D}$ $\boxtimes$

定理3．10 $G_2\cap REG^{\omega}\subseteq \boldsymbol{O}_3$

〔証明〕 $T_3^{\omega}(\mathfrak{M})\epsilon G_2$とする。ただし$\mathfrak{M}=(S,\ \Sigma,\ s_0,\ M,\ \mathscr{F})$。このとき$T_3^{\omega}(\mathfrak{M})=T_2^{\omega}(\mathfrak{M}^*)$なる$\mathfrak{M}^*$が作れれば良い。

まず，各$s\epsilon S$毎に次のような動きをするオートマトン$\mathfrak{M}s$を作る。

$$M'(s_0',x)=\epsilon \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{(a)または(b)}$$

(ただし，M', s_0', ϵ はそれぞれ$\mathfrak{M}s$の状態遷移関数，初期状態，および状態である。)

(a) $\forall z<x\ \ M(s_0,\ z)\neq s\wedge M(s_0,\ x)=s$

($\mathfrak{M}$がxで初めてsになるということ。)

(b) $M(s_0,\ x)=s\ \wedge$

$$\{M(s_0,\ z)|y\leq z\leq x,\ \ M(s_0,\ y)=s\ for\ some\ y\epsilon\Sigma^*\}\epsilon\ \mathscr{F}$$

（直前の s から，今の s までの区間で出現した$\mathfrak{M}$の状態の集合が，$\mathscr{F}$ の元になっていること。）

この様子を図３—１に示す。

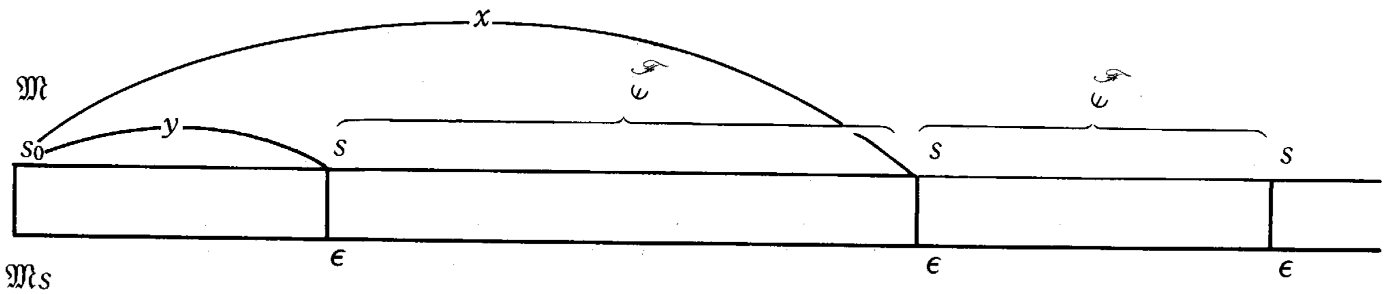

図３—１

さて $S=\{s_1,\ \cdots\cdots,\ s_n\}$ とするとき，上述の $\mathfrak{M}s_1, \cdots, \mathfrak{M}s_n$ が構成されて 2-acceptance の有限オートマトン$\mathfrak{M}^*$を次のように定義する。

$\mathfrak{M}^* = < \mathfrak{M}s_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{M}s_n,\ D^* >$

ただし

$D^* = \{ (d_1, \cdots\cdots, d_n) \mid$ 各 d_iは $\mathfrak{M}s_i$の状態で或る $j \leq n$ について $d_j = \epsilon\}$

よって，$(d_1, \cdots, \epsilon, \cdots, d_n) \epsilon D^*$

このとき，$T^{\mathscr{U}}_{3}(\mathfrak{M}) = T^{\mathscr{U}}_{2}(\mathfrak{M}^*)$が成り立つことを確認する。以下，$\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}$ と $\mathscr{H}s$ は$\mathfrak{M}$に関するものとする。まず $T^{\mathscr{U}}_{3}(\mathfrak{M}) \subseteq T^{\mathscr{U}}_{2}(\mathfrak{M}^*)$ から示す。

$\alpha \epsilon T^{\mathscr{U}}_{3}(\mathfrak{M})$ とすると $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}\ \epsilon \mathscr{F}$。今，$s \epsilon$ $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}$ を *fix* する。すなわち，$\mathfrak{M}$ が α 上を読み進むとき状態 s は無限回出現する。よって（Basis），s の最初の出現があるからその点で$\mathfrak{M}s$は初めて ϵ になる。（Induction Step）$\mathfrak{M}s$は既に n 回，ϵ に落ちているとする。そして，それ以降の s から s の間に出現した状態の集合を $E_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。ただし E_iは s も含む。

この様子を図3—2に示す。

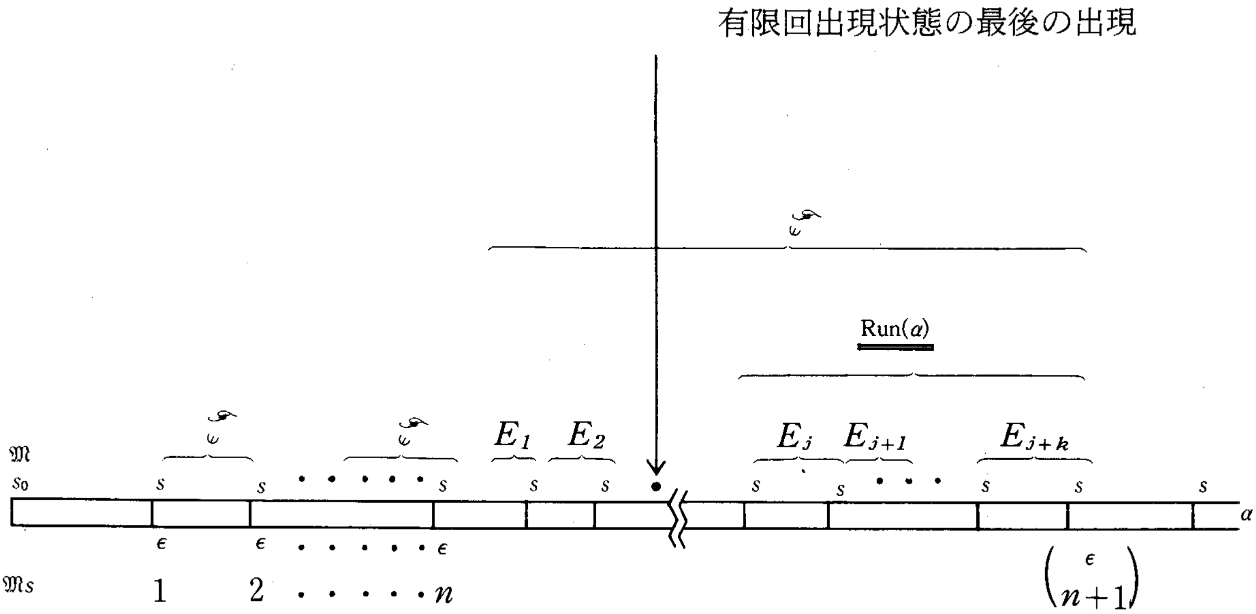

図3—2

十分, 大きな j, k をとると $\bigcup_{l=0}^{k} E_{j+l} = \underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha)}}$ となる。よって $\bigcup_{l=0}^{k} E_{j+l} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{H}s$ であって $E_{j-1} \in \mathscr{H}s$ であるから, 補助定理3.9により $\bigcup_{l=-1}^{k} E_{j+l} \in \mathscr{F}$。

再び $\bigcup_{l=-1}^{k} E_{j+l} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{H}s$ であって $E_{j-2} \in \mathscr{H}s$。よって $\bigcup_{l=-2}^{k} E_{j+l} \in \mathscr{F}$。これを続けて $\bigcup_{l=1}^{j+k} E_l \in \mathscr{F}$ を得ることができるから, $n+1$ 番目の ϵ の出現を見ることができる。n は任意であったから, α 上を $\mathfrak{M}s$ が走るとき ϵ は無限回, 出現する。そこで α 上を $\mathfrak{M}^*$ が走るときを考えると

$$(d_1, d_2, \cdots, \epsilon, \cdots, d_n) \in \underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha, \mathfrak{M}^*)}}$$

$\mathfrak{M}s_2$ の状態

$\mathfrak{M}s_1$ の状態　　$\mathfrak{M}s$ の状態　　$\mathfrak{M}s_n$ の状態

よって $\underline{\underline{\mathrm{Run}(\alpha, \mathfrak{M}^*)}} \cap D^* \neq \phi$。従って $\alpha \in T_2^{\omega}(\mathfrak{M}^*)$

次に逆の包含関係を示す。$\alpha\epsilon T_2^{\omega}(\mathfrak{M}^*)$とすると$\mathrm{Run}(\alpha,\ \mathfrak{M}^*)\cap D^*\neq\phi$。よって$\mathfrak{M}^*$が$\alpha$上を走るとき，ある$\mathfrak{M}s$は無限回$\epsilon$に落ち入る。$\mathfrak{M}s$の$i$番目の$\epsilon$から$i+1$番目の$\epsilon$までの間に出現する$\mathfrak{M}$の状態の集合を$E_i(i=1,$ $2,\ \cdots\cdots)$とおく。(図３－３)

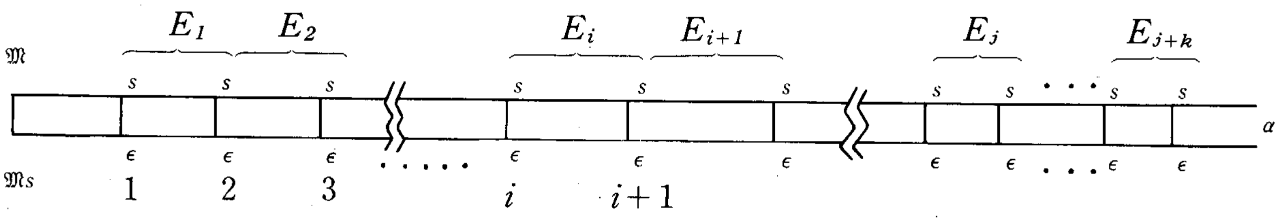

図 3—3

ϵの出現の定義から各$E_i\epsilon\mathscr{F}$で，明らかに$E_i\epsilon\ \mathscr{H}s$。

よってすべての$i\geq 1$に対して$E_i\epsilon\mathscr{F}\cap\mathscr{H}s$。

また十分大きなjとkをとれば，

$$E_j\cup E_{j+1}\cup\cdots\cup E_{j+k}=\mathrm{Run}(\alpha)$$

で各$E_i\epsilon\ \mathscr{H}s$であるから，再び補助定理3.９を操り返し適用して

$$\mathrm{Run}(\alpha)=E_j\cup E_{j+1}\cup\cdots\cup E_{j+k}\epsilon\ \mathscr{F}$$

よって$\alpha\epsilon T_3^{\omega}(\mathfrak{M})$である。 $\boxtimes$

定理３．６，定理3.10より次の定理を得る。

定理３．11 $O_3=G_2\cap REG^{\omega}$

Kobayashi, Takahashi, and Yamasaki〔３〕，Landweber〔４〕により Borel hierarchy と ω-regular sets のクラスとの間には前述の通りの関係があるが，これを図示すると図３－４のようになる。すなわち，O_3は図の斜線部分で示される。この図を LANDWEBER の階層という。

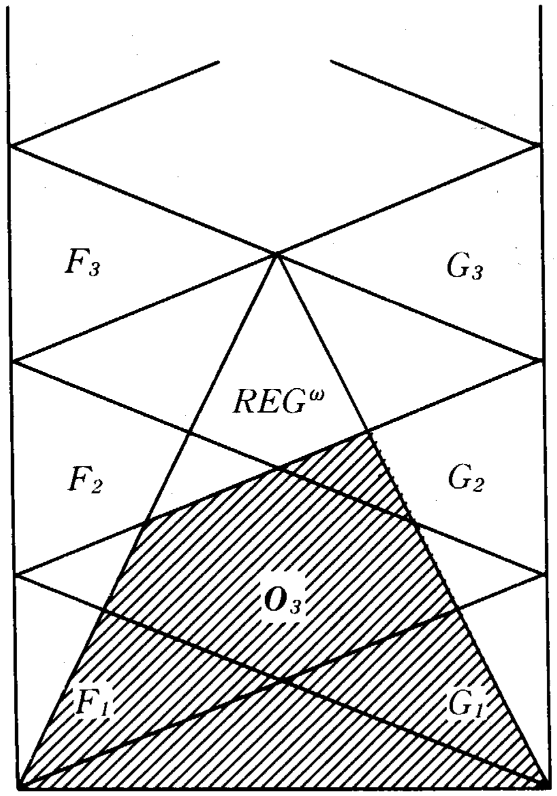

図 3—4

§4. Main Theorem

本節では ω-regular sets のクラス SF_m^ω を定義し，これが $\boldsymbol{O}_3$に含まれることを示す。すなわち，LANDWEBER の階層における SF_m^ω の位置を明らかにするのである。

まず minimal set の概念を定義する。

定義4．1 $\Sigma^+=\Sigma^*-\{\varepsilon\}$ とおく。$A\subseteq\Sigma^*$ が *minimal set* とは，次のことが成り立つことである。

$$A\cap A\Sigma^+=\phi$$

すなわち，minimal set A の語は，その語の prefix として A の元であるような語をもつことがないのである。

定義4．2 $X\subseteq\Sigma^\omega$ が *ω-star-free minimal set* とは

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}U_i\ \lim\ V_i$$

となるような $m\geq 1$, $U_1,\cdots,U_m$, $V_1,\cdots V_m\epsilon SF$ が存在して，各 U_iは minimal set となっていることである。ω-star-free minimal sets のクラスを SF_m^ω

で表わす。定義から，あきらかに $SF^{\omega}_{m} \subseteq SF^{\omega}$ である。

補助定理2.8，補助定理3.4により REG^{ω} はブール代数をなす。補助定理2.10および定理3.11より次の補助定理を得る。

補助定理4．3 $\boldsymbol{O}_3$は，有限和の下で閉じている。

定理4．4 (Main theorem)

$SF^{\omega}_{m} \subseteq \boldsymbol{O}_3$

〔**証明**〕任意の A，$B \epsilon SF$（ただし A は minimal）に対して $A\lim B = T^{\omega}_{2}(\mathfrak{C})$ なる 2-acceptance の有限オートマトン $\mathfrak{C}$ が作れることが言えれば，$L \epsilon SF^{\omega}_{m}$ をとったとき $L = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \lim B_i$（各 A_iは minimal）と書けるわけであるが，上述の主張が言えれば補助定理4.3により $L \epsilon \boldsymbol{O}_3$となる。

さて $A = T(\mathfrak{A})$で $\mathfrak{A} = (S'$，Σ，s'_0，M'，$F')$，$B = T(\mathfrak{B})$で $\mathfrak{B} = (S$，Σ，s_0，M，$F)$とする。

ここで　$x \epsilon A\lim B$

$$\begin{aligned}
&\textit{iff} \quad \exists k\,[x(0,\ k)\epsilon A \wedge x(k, \infty)\epsilon \lim B]\\
&\textit{iff} \quad \exists k\,[x(0,\ k)\epsilon A \wedge \forall i \geq k \exists j \geq i\ x(k,\ j)\epsilon B]\\
&\textit{iff} \quad \exists k\,[x(0,\ k)\epsilon T(\mathfrak{A}) \wedge \forall i \geq k \exists j \geq i\ x(k,\ j)\epsilon T(\mathfrak{B})]\\
&\textit{iff} \quad \exists k\,[x(0,\ k)\epsilon T(\mathfrak{A}) \wedge x(k, \infty)\epsilon T^{\omega}_{2}(\mathfrak{B})]
\end{aligned}$$

であることに注意して $x \epsilon A\lim B$ をとると，系列 $0 < i_1 < i_2 < i_3 < \cdots\cdots$が存在してすべての n に対して $x(0, i_n)\epsilon A$ で適当な n について $x(i_n, \infty)\epsilon \lim B$ であると仮定できる。

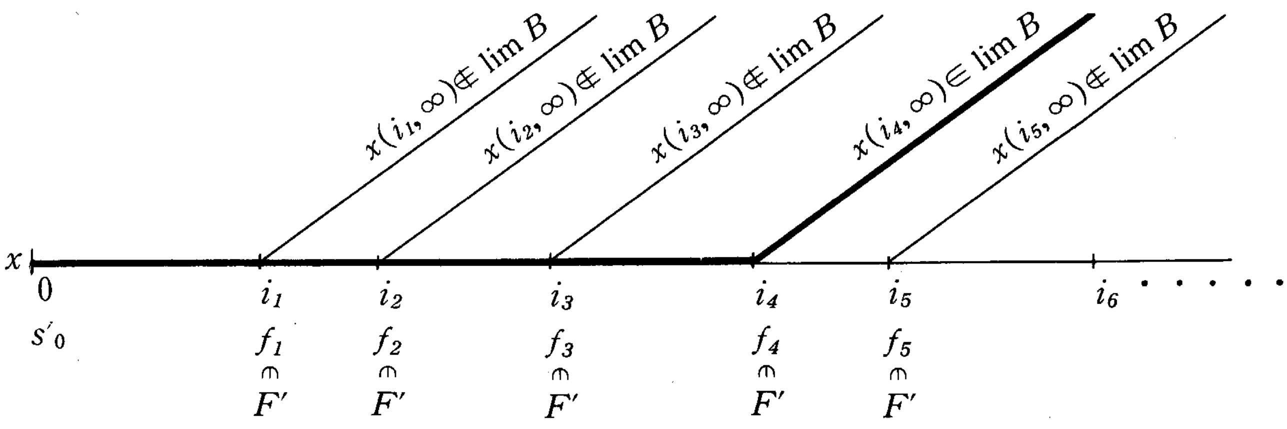

図4－1

すなわち $x(0,\ i_n)\in A$ なる点 $i_1,\ i_2,\ i_3,\cdots$ を *candidate point* ということにすれば，

(※) $x\in A\lim B$ *iff* ある candidate point k が存在して $x(k,\infty)\in T_2^\omega(\mathfrak{B})$ と書ける。(※)を満たす k を *winning point* ということにする。

従って $A\lim B$ を 2-accept する有限オートマトン $\mathfrak{C}$ は $x\in\Sigma^\omega$ 上を走るとき，はじめ $\mathfrak{A}$ を模倣し candidate point に達したならば，2-acceptance mode で $\mathfrak{B}$ を模倣すればよいということになる。そして，$x\in A\lim B$ であれば図4－1のように candidate point は可算無限個あるから各 candidate point から可算無限個の $\mathfrak{B}$ が走り出すことになるが，そのうちの少なくとも1つの winning point からスタートした $\mathfrak{B}$ が x の suffix を 2-accept することになる。

しかしながら，このように vertical に並んで走る幾つもの $\mathfrak{B}$ の状態列を考えても $\mathfrak{B}$ の状態集合 S は有限であるから同時に走る異なる $\mathfrak{B}$ の個数は高々 $\mathrm{card}(S)=n$ 個である。このことを次のように定式化する。

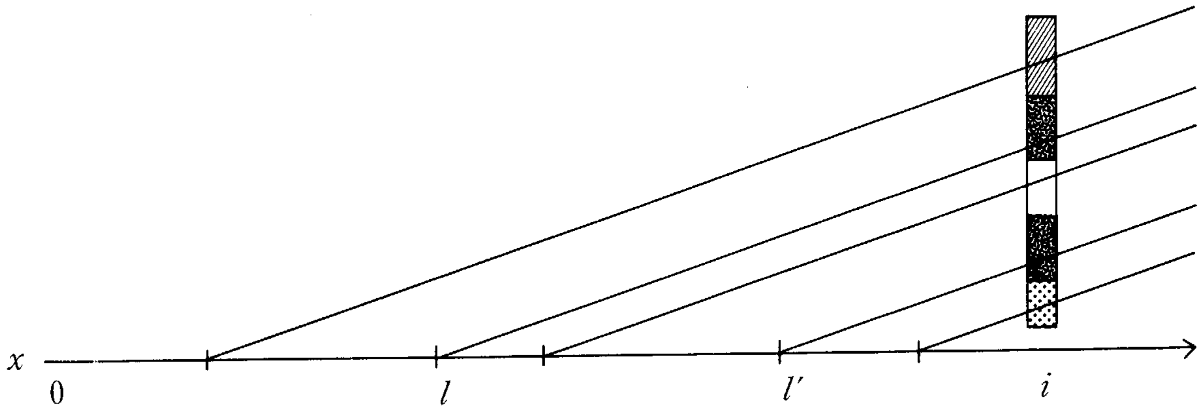

図 4—2

今，l 番目の$\mathfrak{B}$と l' ($>l$) 番目の$\mathfrak{B}$とが点 i で同じ状態に達したとすれば，i 以降はこれら 2 つの機械は同じ状態をとり続けるから，どちらか一方，たとえば l' 番目の$\mathfrak{B}$は i 以降は走らせる必要がない。すなわち現在進行中の幾つかの$\mathfrak{B}$達のある時点での状態の列

$$u=u(0)\,u(1)\cdots\cdots u(j)\cdots\cdots u(i-1)\,u(i)\cdots u(k-1)\in S^*$$

に於いて $u(j)=u(i)$ であったならば，$u(i)$ を消去して $u(j)$ を考えるだけで十分である。このような縮約(condense)をすべての $i<k$ に施して後，得られる S の列を

$$C(u)=u(i_1)\cdots u(i_m)$$

で表わすことにする。

また $u=u(0)\cdots u(k-1)\in S^*$のとき，$\sigma\in\Sigma$ に対して $M(u,\ \sigma)$ を

$$M(u,\ \sigma)=M(u(0),\ \sigma)\cdots M(u(k-1),\ \sigma)$$

で定める。

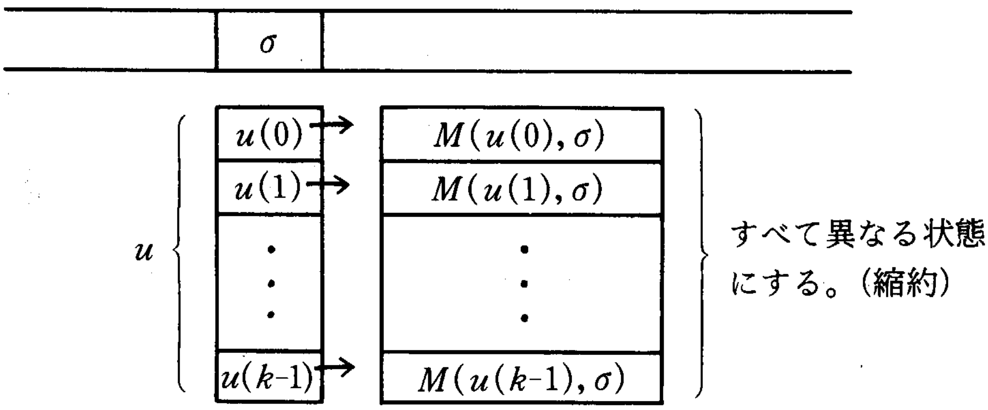

図4—3

従って $M(u,\ \sigma)\in S^*$となり，これは縦に並んだ高々card$(S)=n$個の𝔅達の状態遷移をあらわすことになる。

さて $\mathfrak{C}=(\bar{S},\ \Sigma,\ \bar{M},\ \bar{s}_0,\ \bar{F})$を次のように定める。

(i) $\bar{S}=\{\left[\begin{smallmatrix}s'\\u\end{smallmatrix}\right] \mid s'\in S',\ u\in S^*$は縮約形$\}$

(ii) $(s',\ u)\in\bar{S}$, $\sigma\in\Sigma$に対して

case 1) $s'\notin F'$のとき

$$\overline{M}\left(\left[\begin{smallmatrix}s'\\u\end{smallmatrix}\right],\sigma\right)=\left[\begin{matrix}M'(s',\ \sigma)\\C(M(u,\ \sigma))\end{matrix}\right]$$

case 2) $s'\in F'$のとき，新しく𝔅をもう一台起動させ𝔅達の状態列を condense する。

$$\overline{M}\left(\left[\begin{smallmatrix}s'\\u\end{smallmatrix}\right],\ \sigma\right)=\left[\begin{matrix}M'(s',\ \sigma)\\C(M(us_0,\ \sigma))\end{matrix}\right]$$

(iii) $\bar{s}_0=\left[\begin{smallmatrix}s'_0\\\varepsilon\end{smallmatrix}\right]$

(iv) $\bar{F}=\{\left[\begin{smallmatrix}s'\\u\end{smallmatrix}\right]\in\overline{S}\mid\exists k\ \ u(k)\in F\}$

このとき $A\mathrm{lim}B=T_2^{\omega}$ $(\mathfrak{C})$を証明したいのであるが，そのために若干の準備を行なう。

任意の $x\in\Sigma^{\omega}$ に対して x 上を $\mathfrak{C}$ が走るときの状態の無限列を r とすると $r_1=p_0r$ は x 上の $\mathfrak{A}$ の状態列であり，$r_2=p_1r$ は vertical に並んだ高々 n 個の $\mathfrak{B}$ 達の状態列である。今，$x(0,\ j)\in A$ とすると $r_1(j)\in F$ であるがこの candidate point j からは $\mathfrak{B}$ がもう1台，状態 s_0 でスタートするから

$$r_2(j+1)=C(M(r_2(j)s_0,\ x(j))$$

となる。ここで j から s_0 でスタートした $\mathfrak{B}$ の状態列を r^j とおくと

$$\forall l\geq 0\exists!k_l \qquad [r_2(j+l)(k_l)=r^j(l)] \qquad (*)$$

が成り立つ。何となれば $r^j(l)$ が重複して2個以上あるときは，縮約によって $r_2(j+l)$ の中にただ1つの $r^j(l)$ が残されるからである。

さて $x\in A\lim B$ をとると

$$\exists k[x(0,\ k)\in A\wedge x(k,\infty)\in\lim B]$$

であるが $x(0,\ k)\in A$ より

$$r_1(k)\in F' \qquad (1)$$

$x(k,\infty)\in T_2^{\omega}(\mathfrak{B})$ より

$$\forall i\geq k\exists j\geq i\geq k \quad M(s_0,\ x(k,\ j))\in F \qquad (2)$$

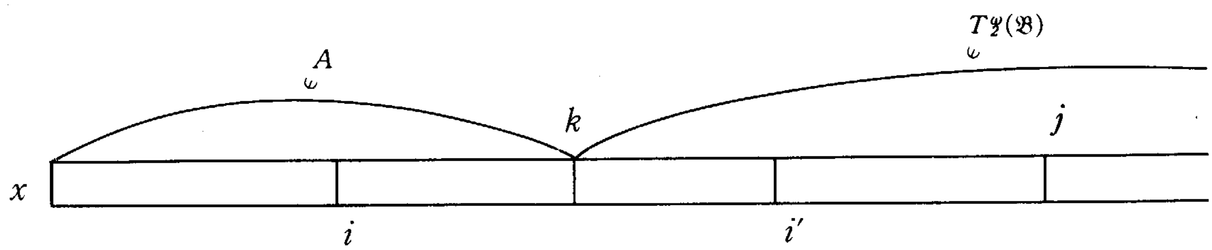

図4－4

更に

$$\forall i<k\exists i'[i'\geq k]$$

でかかる i' に対して(2)が成り立つから

$$\forall i<k\exists j>k>i \quad M(s_0,\ x(k,\ j))\in F \qquad (2)'$$

(2), (2)′より

$\forall i \exists j \geq \max\{k, i\} \geq i \ M(s_0, x(k, j)) \epsilon F$

すなわち

$$\forall i \exists j \geq i \quad r^k(j-k) \epsilon F \tag{3}$$

さて $\overline{M}(\left[\begin{smallmatrix} s'_0 \\ \varepsilon \end{smallmatrix}\right], x(0,j)) = \left[\begin{smallmatrix} r_1(j) \\ r_2(j) \end{smallmatrix}\right]$ と書けるが(＊)と(3)により

$\forall i \exists j \geq i \exists m \ r_2(j)(m) = r^k(j-k) \epsilon F$

従って

$\forall i \exists j \geq i \quad \overline{M}(\overline{s}_0, x(0, j)) \epsilon \overline{F}$

よって $x \epsilon T_2^{\omega}$ ($\mathfrak{C}$) である。

逆に $x \epsilon T_2^{\omega}$ ($\mathfrak{C}$) をとると

$$\forall i \exists j \geq i \quad \overline{M}(\overline{s}_0, x(0,j)) = \left[\begin{smallmatrix} r_1(j) \\ r_2(j) \end{smallmatrix}\right] \epsilon \overline{F} \tag{4}$$

であるから $\exists m \ r_2(j)(m) \epsilon F$

従って，j に至る前に $\mathfrak{B}$ がスタートしている。すなわち $r_2(j)(m) = r^k(j-k)$ なる k がある。

よって，

$$\exists k < j[r^k(j-k) \epsilon F \wedge r_1(k) \epsilon F'] \tag{5}$$

すなわち(4)なる任意の i に対して(5)なる k が得られる。特に $i \geq k$ なる i に対しても(4)が成り立ち(5)なる k' が得られる。すなわち

$$\forall i \geq k \exists j \geq i \geq k \exists k'[r^{k'}(j-k') \epsilon F \tag{6}$$

$$\wedge r_1(k') \epsilon F'] \tag{7}$$

いま，$k \neq k'$ と仮定すると(5), (7)より

$x(0, k) \epsilon A$ かつ $x(0, k') \epsilon A$。しかし，これは A が minimal であることに反する。よって　$k = k'$ でなければならない。

従って(6), (7)は次のように書ける。

$$\forall i \geq k \exists j \geq i \geq k \ [r^k(j-k) \epsilon F \wedge r_1(k) \epsilon F'] \tag{8}$$

従って $M(s_0, x(k, j)) \epsilon F$。よって

$\forall i \geq k \exists j \geq i \ x(k, j) \epsilon B$

従って $x(k,\infty)\epsilon\lim B$ であって $x(0,\ k)\epsilon A$

従って $x\epsilon A\lim B$

以上により $A\lim B=T_2^\omega(\mathfrak{C})$ である。 $\boxtimes$

§5. む す び

以上，第3節にて $\boldsymbol{O}_3$ が G_2 と REG^ω の intersection で表わされることを，第4節では SF^ω の subclass SF_m^ω が $\boldsymbol{O}_3$ に含まれることを見てきた。

本稿での main theorem の証明は，かなりめんどうでたいくつである。筆者はこの結果のより簡単な証明を既に得ているが，これについては稿を改めて論じることにしたい。本稿の内容は ω-noncounting regular sets のクラス NC^ω と SF^ω との関係についての研究の，途中の副産物であってアプローチの対象は SF^ω そのものにある。SF^ω については既に Thomas〔9〕で多くの結果が得られているが，筆者は Meyer〔6〕の ω 型言語への拡張という文脈の上で SF^ω の研究を進めて行きたいと考えている。

最後に，本稿を書くに当って色々と御教示いただいた法政大学　田中尚夫教授に深謝の意を表わします。

文　献

〔1〕Büchi, J. On a Decision Method in Restricted Second-Order Arithmetic, Int. Congress on Logic, Methodology, and Philosophy, Stanford, Calif. (1960)

〔2〕Choueka, Y. Theories of Automata on ω-Tapes: A Simplified Approach, J. Comp and System Sci **8**, (1974) 117-141

〔3〕Kobayashi, Takahashi, and Yamasaki. Characterization of ω-Regular Languages by First-Order Formulas, Theoret. Comput. Sci **28**, (1984) 315-327

〔4〕Landweber, L. H. Decision Problems for ω-Automata, Math. Syst. Theory **3**, (1969) 376-384

〔5〕McNaughton, R. Testing and Generating Infinite Suquences by a Finite Automata, Inform and Contr **9**, (1966) 521-530
〔6〕Meyer, A, R. A Note on Star-free Event, J. ACM **16**(2), (1969) 220-225
〔7〕高橋信行。ω 型有限オートマトンについての若干の考察——Büchi オートマトンと Muller オートマトン——, 横浜商大論集第13巻第1号(1979) 125-148
〔8〕竹内外史。「オートマトン入門(上), (中), (下)」, 数学セミナー**16**, (1977) 59-64, **17**, (1978) 51-59, 82-87
〔9〕Thomas, W. Star-free Regular Set on ω-Sequences Inform and Contr **42**, (1979) 148-156