＜研究ノート＞

ω型有限オートマトンについての若干の考察

——Büchi オートマトンと Muller オートマトン(1)——

高　橋　信　行

§1. まえがき

前回，筆者は横浜商大論集第12巻第1号に『有限オートマトンによる実数の定義可能性』と題する拙稿を記し，m-adic アルファベットの文字が無限個並んだテープ上を走る有限オートマトンを考え，かかる機械によって定義される集合について2, 3の結果を得た。その中で実数 $x \epsilon \mathbf{I}$ が有限オートマトン M によって definable であるとは x の m 進展開 $x=0.\ \sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2\cdots\cdots$が存在してすべての $n \epsilon \omega$ に対して $\bar{\sigma}_n \epsilon L(M)$ となることであるとして FA-definability を定義した。

この definability は無限文字列 $x=x_0x_1x_2\cdots\cdots$のすべての prefix の受理可能性を応用したものであるが，すべての prefix $\bar{\sigma}_n$ が M によって受理されなければならないということは，とりもなおさず初期状態でスタートして無限可算個のどの点でも final state に落ち続けてゆかねばならないということであり定義される集合は非常に強い制限を受けている。実際に定義される集合は有理閉区間を含む閉集合であり，かかる集合のクラスはブール代数系をなさないこと等があげられている。〔3〕

かかる条件の厳しさから来る definable sets の unfruitfulness を克服すべく筆者は有限オートマトンが無限テープ上を走ったときのテープの受理可能性 (acceptance) をいろいろ考えていたが文献〔2〕の reference に竹内〔1〕を見つけ，これ

を拝読し大変興味深い結果が得られていることを知った。

本稿は，文献〔1〕〔2〕及び〔5〕の報告の中の ω 型有限オートマトンについての幾つかの成果を通常の有限オートマトン論との関連の上で考察したものである。特に今回は第3節においては Büchi オートマトンによって定義される集合のクラスの projection の下での閉包性，及びかかる集合の regular sets との関係について論じ，第4節では狭義の Muller オートマトンと広義の Muller オートマトンとの同等性，及び Muller オートマトンによって定義される集合のクラスのブール演算の下での閉包性について論じている。尚，本稿は研究論文というより総合報告論文の色彩が強いのでこれらの結果の証明は，多少詳細にわたって述べることにした。

§2. 記号と準備

言語および有限オートマトンについては文献〔3〕〔4〕等を参照していただくとして本節ではまず finite word から infinite word に入力語を拡張したときの形式化から考えてみることにする。

2. 1 無限記号列

Σ は有限個の文字から成る任意のアルファベットとする。

Σ の文字から成る無限列

$$x=x_0\ x_1\ x_2\cdots x_i\cdots$$

を考え，かかる x の全体を Σ^ω で表わす。

すなわち $\Sigma^\omega=\{x\,|\,\forall i\epsilon\omega\ \ x_i\epsilon\Sigma\}$ である。

ここで $x\epsilon\Sigma^\omega$ は自然数から Σ の文字への割り当ての記述に他ならないから Σ^ω は自然数全体 ω から Σ への関数の全体としても定義される。

すなわち

$$\Sigma^\omega=\{f\,|\,f:\omega\longrightarrow\Sigma\}$$

である。

これは関数値と関数とを同一視した結果であるが，いずれにせよ Σ 上の右方向無限記号列の全体は Σ^ω として定式化される。

すなわちこれから我々が考察の対象とするものは Σ^{ω} の元としての infinite word であり，これが ω 型有限オートマトンの入力テープとなる。

次にかかる無限テープを読み込んだときの有限オートマトンの状態の無限列を考えてみよう。

非決定性の有限オートマトン $\mathfrak{A}=<S, \Sigma, M, s_0, F>$ を考える。ここに

(i) S は状態の空でない有限集合.

(ii) Σ は空でない入力アルファベット.

(iii) M は$S\times\Sigma$ から 2^S への関数である。

(iv) $s_0\in S$ は初期状態.

(v) $F\subseteq S$ は最終状態集合である。

アルファベットを Σ に固定して考えるときは $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, F>$ と書くこともある。

今，$x\in\Sigma^{\omega}$ と $\mathfrak{A}$ とが与えられて infinite word x 上を $\mathfrak{A}$ が走ったとする。このとき得られる状態の無限列を $\mathfrak{A}$ の x 上の run ということにすれば，run γ は次の性質を満たす S^{ω} の元として定義される。

すなわち

$\gamma=s_0\ s_1\ s_2\cdots$ で $\forall i\geq 0\ s_{i+1}\in M(s_i,\ x_i)$

ここにすべての $i\in\omega$ について $s_i\in S$ である。従って x 上の $\mathfrak{A}$ の run の全体 $Rn\ (\mathfrak{A},\ x)$ は次のように形式化することができる。

$Rn\ (\mathfrak{A},\ x)=\{\gamma\in S^{\omega}\mid\forall i\geq 0\ \gamma_{i+1}\in M\ (\gamma_i,\ x_i)\}$

これで無限テープと無限状態推移列が形式化された。次に本稿の主題である ω 型有限オートマトンによって定義される集合の性質を論じるために無限テープの受理可能性について準備を整えることにしよう。

2. 2 受理可能性

x が finite word の場合，その受理可能性 (acceptance) はテープの末端で出現する状態の集合 $M\ (s_0,\ x)$ と最終状態集合 F との intersection をとって，それが空でないことによって定義されていた。しかしながら x が infinite word となると今度は“末端”という概念は起こり得ないので別のアプローチが必要になって来る。

実はこの末端の非存在性，すなわち endless という概念が infiniteness なる概念を特徴付けていると見ることもできる。そこで finite word に対して "end" を用いたように infinite word に対しては "endlessness ie infiniteness" を用いてその acceptance をうまく形式化することを試みてみよう。すなわち "末端で出現する状態の集合" の代わりに "無限回 出現する状態の集合" を考えるのである。この集合は次のように定式化される。

$\gamma:\omega \longrightarrow S$ とし

$\boldsymbol{In}\ (\gamma)=\{s\epsilon S\,|\,\boldsymbol{card}\ (\gamma^{-1}\ (s))\geq\omega\}$

すなわち写像 $\gamma:\omega \longrightarrow S$ の逆写像 γ^{-1} を考え，状態集合 S の元 s でその逆像 $\gamma^{-1}\ (s)$ の濃度が少なくとも自然数全体の濃度と等しいもの，すなわち run 中に出現する回数が可算無限回かもしくはそれ以上であるような状態 s から成る集合が $\boldsymbol{In}\ (\gamma)$ であり，これが "無限回 出現する状態の集合" の形式的表現である。

さて入力テープ $x\epsilon\Sigma^{\omega}$ に対してある run γ が構成されて，その run 中に無限回出現する状態の集合 $\boldsymbol{In}\ (\gamma)$ と最終状態集合 F とが互いに素でないとき，入力語 x は accept されるというのが次節に述べる Büchi オートマトンの acceptance の定義である。

これに対して最終状態集合 F を S の subsets のクラスとして定義しておき，すなわち $F\subseteq 2^{S}$ として $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, F>$ を考え，$x\epsilon\Sigma^{\omega}$ を input したとき無限回起こる状態の集合 $\boldsymbol{In}\ (\gamma)$ がちょうど F の１つの元になっているとき x は accept されるというのが第４節の狭い意味での Muller オートマトンの acceptance の定義である。

更に第４節ではこの狭い意味での Muller オートマトンに対して広義の Muller オートマトン

$$\mathfrak{A}=<S,\ M,\ s_0,\ \Omega>$$

についても一連の考察を進めるが，実はここに述べた３つの acceptance はまったく同値な概念であることが証明される。本稿では狭義の Muller オートマトンと広義の Muller オートマトンの同等性については第４節において言及するが Büchi automaton definability と Muller automaton definability との同等性についてはその

詳細な報告は別の機会に譲ることにしたい。

§ 3. Büchi オートマトン

定義 3.1 $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, F>$ は非決定性の有限オートマトンとする。このとき $x\epsilon\Sigma^\omega$ が Büchi オートマトン $\mathfrak{A}$ によって定義されるということを次の式で定義する。

$$\exists\gamma\epsilon Rn\ (\mathfrak{A}, x)\ [\gamma(0)=s_0\ \&\ In\ (\gamma)\cap F\neq\phi]$$

すなわち初期状態 s_0 でスタートし，少なくとも1つの final state が無限回出現するような x 上の $\mathfrak{A}$ の run が存在するとき，x は $\mathfrak{A}$ によって定義されるというのである。

$\mathfrak{A}$ は普通の有限オートマトンであるが infinite word の入力に対してその acceptance がこのように定義されるとき，$\mathfrak{A}$ を Büchi オートマトンということにする。

かかる acceptance を 2–acceptance ということもある。〔5〕

Büchi オートマトン $\mathfrak{A}$ によって定義される infinite word の全体を T_ω ($\mathfrak{A}$) であらわす。

すなわち

$$T_\omega\ (\mathfrak{A})=\{x\epsilon\Sigma^\omega\,|\,x \text{ は } \mathfrak{A} \text{ で定義される}\}$$

定義 3.2 写像 $p:\Sigma\to\Sigma_1$ を考え，これを次のように Σ^ω から $\Sigma_1{}^\omega$ への写像に拡張する。

すなわち $x=x_0\ x_1\ x_2\cdots\epsilon\Sigma^\omega$ に対し

$$p(x)=p(x_0)\ p(x_1)\ p(x_2)\cdots\epsilon\Sigma_1{}^\omega$$

と定める。

かかる写像 p を Σ^ω から $\Sigma_1{}^\omega$ への射影 (projection) という。

$A=T_\omega$ ($\mathfrak{A}$) のとき A を definable set というが次の定理は Büchi automaton definable sets のクラスの projection の演算の下での閉包性を論じたものであり，その閉包性が肯定的であることを主張している。

定理 3.1 $A\subseteq\Sigma^\omega$ が Büchi オートマトン $\mathfrak{A}=<S, \Sigma, M, s_0, F>$ で definable とすると $p(A)=\{p(x)\ |x\epsilon A\}$ を定義する Σ_1 上の Büchi オートマトン $\mathfrak{A}_1$ が存在

する。

〔証明〕 $p(A)$ を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{A}_1=\langle S,\Sigma_1,M_1,s_0,F\rangle$ を考える。ただし $M_1:S\times\Sigma_1\to 2^S$ は次のように定める。

$$M_1(s,\sigma_1)=\bigcup_{p(\sigma)=\sigma_1} M(s,\sigma)$$

このとき $p(A)=T_\omega(\mathfrak{A}_1)$ となることを言う。

まず $y\in p(A)$ を任意にとると $y=p(x)$ なる $x\in A$ が存在する。従って

$$\exists\gamma\in Rn(\mathfrak{A},x)\ [In(\gamma)\cap F\neq\phi]$$

すなわち $\gamma=s_0\, s_1\, s_2\cdots$ と書けて $\forall i\geq 0\ M(s_i,x_i)\ni s_{i+1}$ が成り立っている。

又，各 y_i に対し或る整数 $m(i)$ が定まって

$y_i=p(\sigma_1)=\cdots=p(\sigma_m)$ となる。

今，$\mathfrak{A}$ の x 上の run γ とまったく同様な状態の無限列を γ_1 とおくと $\forall i\geq 0$ に対し

$$M_1(s_i,y_i)=\bigcup_{j=1}^{m}M(s_i,\sigma_j)\supset M(s_i,x_i)\ni s_{i+1}$$

が成り立つ。よって $\gamma_1\in Rn(\mathfrak{A}_1,y)$ で $In(\gamma_1)\cap F\neq\phi$

従って $y\in T_\omega(\mathfrak{A}_1)$

逆に $y\in T_\omega(\mathfrak{A}_1)$ をとると $y=y_0\, y_1\, y_2\cdots\in\Sigma_1{}^\omega$ と書けて，或る run $\gamma_1=s_0\, s_1\, s_2\, s_3\cdots$ が存在し

$\gamma_1\in Rn(\mathfrak{A}_1,y)\ \&\ In(\gamma_1)\cap F\neq\phi$ である。

M_1 の定義により $\mathfrak{A}_1$ の見る文字は p の像となっているから $T_\omega(\mathfrak{A}_1)$ の列中の各文字は $p(\Sigma)$ の元である。従って各 y_i に対し或る $m(i)$ が定まって $p(\sigma_1)=p(\sigma_2)=\cdots=p(\sigma_m)=y_i$ となるような $\sigma_j\ (j=1,\cdots,m)$ が存在する。

また $\gamma_1\in Rn(\mathfrak{A}_1,y)$ であるから $\forall i\geq 0$ について

$M_1(s_i,y_i)=\bigcup_{j=1}^{m}M(s_i,\sigma_j)\ni s_{i+1}$ が成り立っている。

従って或る $j\ (1\leq j\leq m)$ に対し $M(s_i,\sigma_j)\ni s_{i+1}$ である。かかる σ_j を x_i とおく。

このような手続きで，すべての y_i に対して x_i を対応づけ $x=x_0\, x_1\, x_2\cdots\in\Sigma^\omega$ を作ると $p(x)=y$ である。

今，γ_1 とまったく同じ無限状態列 $s_0\, s_1\, s_2\, s_3\cdots$ を γ とおけば

$\forall i\geq 0$ に対し $M(s_i,x_i)\ni s_{i+1}$

となるから $\gamma\epsilon Rn\ (\mathfrak{A},\ x)$ であり $In\ (\gamma)\cap F\neq\phi$ である。

よってかかる x について $x\epsilon A$

従って $p(x)=y\epsilon p\ (A)$

以上により $p(A)=T_\omega\ (\mathfrak{A}_1)$ が成り立つ。 $\boxtimes$

定義 3.3 Σ 上の infinite word

$$x=x_0\ x_1\cdots x_i\ x_{i+1}\cdots x_{j-1}\ x_j\ x_{j+1}\cdots\epsilon\ \Sigma^\omega$$

が与えられたとき

$$x\ (i,\ j)=x_i\ x_{i+1}\cdots x_{j-1}\ \epsilon\ \Sigma^*$$

$x\ (j,\ \infty)=x_j\ x_{j+1}\cdots\epsilon\ \Sigma^\omega$ とし

$A\subseteq\Sigma^*,\ B\subseteq\Sigma^\omega$ のとき

$$A^\omega=\{x\epsilon\ \Sigma^\omega\mid\exists 0=i_0<i_1<i_2<\cdots\forall n\ x(i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ A\}$$

$$AB=\{x\epsilon\ \Sigma^\omega\mid\exists i\ [x(0,\ i)\ \epsilon\ A\ \&\ x\ (i,\ \infty)\ \epsilon\ B]\}$$

を定める。

この定義から $A^\omega=(A^*)^\omega$ が成り立つことがすぐにわかる。

実際に $x\epsilon A^\omega$ とすると

$\exists i_0<i_1<i_2<\cdots\forall n\ x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ A\subseteq A^*$ であるから $x\epsilon\ (A^*)^\omega$ となり,

逆に $x\epsilon\ (A^*)^\omega$ とすると定義から

$$\exists i_0<i_1<i_2<\cdots\quad\forall n\quad x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ A^*$$

よって $\forall n\ \exists k\ x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ A^k$ となり $x\ (i_n,\ i_{n+1})$ は k 個の A の words に分けることができる。

すなわち有限系列

$$i_n=i_{n_0}<i_{n_1}<\cdots<i_{n_{k-1}}<i_{n_k}=i_{n+1}$$

が存在してすべての $l\ (l=0,\ 1,\cdots,\ k-1)$ に対し, $x\ (i_{n_l},\ i_{n_{l+1}})\ \epsilon\ A$ である。

これをつなげて無限系列

$$i_0<\cdots<i_1<\cdots\cdots<i_n<i_{n_1}<\cdots<i_{n_{k-1}}<i_{n+1}<\cdots$$

が得られてすべての $n,\ k$ に対し

$$x\ (i_{n_k},\ i_{n_{k+1}})\ \epsilon\ A$$

となるから $x\ \epsilon\ A^\omega$

A^ω について $A^\omega=(A^*)^\omega$ が成り立つということは A. Salomaa の正規表現の体系で $A^*=(A^*)^*$ が成り立つこととよく似た結果である。

さて次の定理は本稿の重要な定理のうちの1つである。すなわちこの定理は Büchi automaton definable set の特徴付けのための表現定理とも言うべきもので ω-Context-Free Languages についても同様の表現定理が成り立つことが，最近 Cohen and Gold〔5〕によって報告されている。

定理 3.2 $C\subseteq\Sigma^\omega$ が Büchi automaton definable set であるための必要十分条件は適当な regular sets $A_0, B_0, \cdots, A_{n-1}, B_{n-1} \subseteq\Sigma^*$ が存在して

$$C=\bigcup_{i<n} A_i\, B_i^\omega$$

と書けることである。

〔証明〕 まず必要性から証明する。すなわち $x\in T_\omega$ $(\mathfrak{A})$ ならば $x\in\bigcup_{i<n} A_i\, B_i^\omega$ を言う。ただし $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, F>$ とする。

今，$s_1\in S$ を初期状態とし $s_2\in S$ を最終状態とするような $\mathfrak{A}$ によって受理される words の全体を A (s_1, s_2) であらわす。

すなわち

$$A\ (s_1, s_2)=\{x\in\Sigma^* \mid \exists\gamma\in Rn\ (\mathfrak{A}, x)\ \ [\gamma(0)=s_1,\ \gamma(l(x))=s_2]\}$$

$$=T\ (<S, M, s_1, \{s_2\}>)$$

となって A (s_1, s_2) は regular sets である。

さて $x\in T_\omega$ $(\mathfrak{A})$ であるから

$$\exists\gamma\in Rn\ (\mathfrak{A}, x)\ \ [\gamma(0)=s_0\ \&\ In\ (\gamma)\cap F\neq\phi]$$

となり F のある state s は x 上の run の中で無限回　出現していることになる。

そこで final state s の無限回　出現する点を $i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots$ とすると

$$s=\gamma(i_1)=\gamma(i_2)=\gamma(i_3)=\cdots\cdots$$

が成り立つ。

このことを図示すると下図のようになる。

	0	i_1	i_2	i_3
$x=$	$x_0\cdots\cdots\cdots\cdots$	$x_{i_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	$x_{i_2}\cdots\cdots\cdots\cdots$	$x_{i_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
	s_0	$s\in F$	$s\in F$	$s\in F$

すなわち $x\ (0,\ i_1)\ \epsilon\ A\ (s_0,\ s)$

$$x\ (i_1,\ i_2)\ \epsilon\ A\ (s,\ s)$$
$$x\ (i_2,\ i_3)\ \epsilon\ A\ (s,\ s)$$
$$\vdots$$

が成り立っている。

従って適当な $s\,\epsilon\,F$ に対して $x\,\epsilon\,A(s_0,\ s)\ A(s,\ s)^{\omega}$ となる。そこで $A(s_0,\ s)=A,\ \ A(s,\ s)=B,\ Card\ (F)=n$ とおくと $x\epsilon \bigcup_{i<n} A_i\ B_i^{\omega}$ である。

次に十分性をいう。

すなわち $x\,\epsilon \bigcup_{i<n} A_i\ B_i^{\omega}$ ($A_i,\ B_i$ は regular) のとき，x は Büchi オートマトンで definable であることをいう。

$x\,\epsilon \bigcup_{i<n} A_i\ B_i^{\omega}$ とすると，或る $i<n$ に対して $x\,\epsilon\,A_i\ B_i^{\omega}$ であるから適当な regular sets $A,\ B$ に対して $x\,\epsilon\,AB^{\omega}$ と仮定して良い。

今 $A,\ B\subseteq\Sigma^*$ を受理する非決定性有限オートマトンをそれぞれ

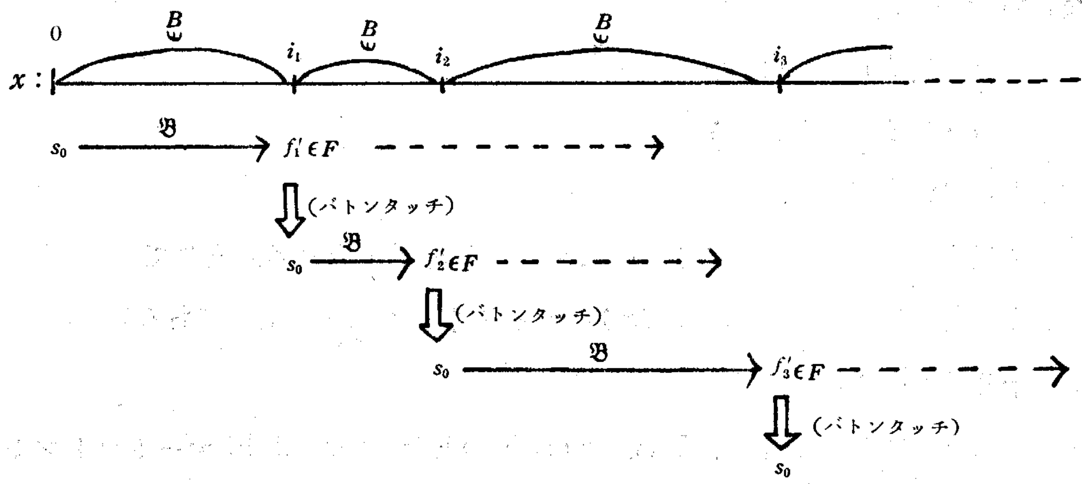
$$\mathfrak{A}=<S'',\ M'',\ s_0'',\ F''>$$
$$\mathfrak{B}=<S,\ M,\ s_0,\ F>$$

とし，まず $\mathfrak{B}$ から $B^{\omega}\subseteq\Sigma^{\omega}$ を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ を作ることを考える。

次に $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ とから AB^{ω} を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{C}$ を構成する。

そうすれば $x\,\epsilon\,T_{\omega}\ (\mathfrak{C})$ となって十分性も確立され任意に与えられた Büchi オートマトン $\mathfrak{D}$ に対して regular sets $A_i,\ B_i\ (i=0,\cdots,n-1)$ が存在して $T_{\omega}\ (\mathfrak{D})=\bigcup_{i<n} A_i\ B_i^{\omega}$ が言える。

まずはじめに $\mathfrak{B}$ から B^{ω} を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ の構成を考えよう。構成のアイディアは B の word から B の word へのバトンタッチをうまく形式化することによるものである。



すなわち上図のように点 i_n での final state に対しては他の点での final state と区別するためにプライムを付け，プライム付きの状態が出現したらこれを強制的に s_0 に置き換えて RE-START させるのである。

B の word は無限個並んでいるのであるから，このプライム付きの state は無限回　出現することになるがかかる $\mathfrak{B}'$ の run を γ' とおき F の各元にプライムを付けて得られる S と互いに素な新しい state set を F' とすれば

$$In\ (\gamma') \cap F' \neq \phi$$

が成り立つから $\mathfrak{B}'$ としては

$$\mathfrak{B}' = \langle S \cup F',\ M',\ s_0,\ F' \rangle$$

とすれば良い。

あとは連続的にバトンタッチができるように M' を定義するだけであるが，そのためにプライム付きの state を得るための次のような演算を考える。

プライムを付けたいのは B の word を読み終えたときの状態で F の元となっているもののみであるから $y \in \Sigma^*$ としたとき $M\ (s_0,\ y) \subseteq S$ に対して次のようにして $(M\ (s_0,\ y))' \subseteq S \cup F'$ を得れば良い。

$$(M\ (s_0,\ y))' = (M\ (s_0,\ y) - F)\ \cup\ (M\ (s_0,\ y) \cap F)'$$

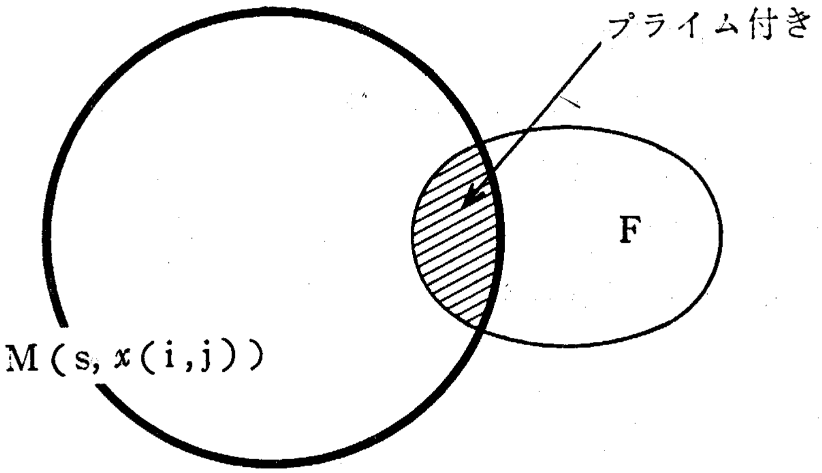
従って一般に $D \subseteq S$ に対して D' 中にプライム付きの状態が出現するのは $D \cap F \neq \phi$ のとき，及びそのときに限ることがわかる。

このような準備のもとで $M' : (S \cup F') \times \Sigma^* \to 2^{S \cup F'}$ の定義を行う。

(i) $s \epsilon S$ に対しては B を受理する $\mathfrak{B}$ の動きをさせる。更にこの next state set の中にはプライム付きになる候補者もあり得るので

$M'(s, x(i, j)) = M(s, x(i, j)) \cup (M(s, x(i, j)))'$

とおく。



(ii) 上図の斜線部分の状態はすべて F' の元であり，かかる $s' \epsilon F'$ に対してはバトンタッチを行う。すなわち

$M'(s', x(i, j)) = M'(s_0, x(i, j))$

と強制的において再スタートさせるのである。

このように定義された Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ について $B^\omega = T_\omega(\mathfrak{B}')$ となることを確認してみよう。初めに $B^\omega \subseteq T_\omega(\mathfrak{B}')$ なる包含関係を確立する。$x \epsilon B^\omega$ をとると

$\exists 0 = i_0 < i_1 < \cdots \forall n \epsilon \omega \, [x(i_n, i_{n+1}) \epsilon B]$ となる。すなわち x は次のように無限個の B の words に分解される。

	$0=i_0$ $\underset{\Psi}{B}$	i_1 $\underset{\Psi}{B}$	i_2 $\underset{\Psi}{B}$		i_n $\underset{\Psi}{B}$	i_{n+1} $\underset{\Psi}{B}$	
$x=$	x_0 ·········	x_{i_1} ·········	x_{i_2} ·········	·········	x_{i_n} ·········	$x_{i_{n+1}}$ ················	

一般性を失うことなく，この系列はこれ以上細分できないと仮定できる。従って word $x(i_n, i_{n+1})$ 上を非決定性有限オートマトン $\mathfrak{B}$ が s_0 から走り始めて，読み終わる前に或る final state に落ちることはあってもそこから s_0 で再び start させた

場合，点 i_{n+1} で final state に落ちることは無いと考えられる。

かかる $x \in B^{\omega}$ 上を Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ が走ったときすべての $n \geq 1$ について点 i_n で少なくとも1つの F' の state が出現することを証明しよう。もし，この assertion が確立されれば

$$\exists \gamma' \in Rn\ (\mathfrak{B}', x)\ [\gamma'(0)=s_0\ \&\ In\ (\gamma') \cap F' \neq \phi]$$

が言えて $x \in T_{\omega}(\mathfrak{B}')$ となる。

点 i_n の subscript $n \in \omega$ についての帰納法による。

〔**Basis**〕 まず $s_0 \in S$ であるから

$M'\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) = M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) \cup (M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)))'$

$x\ (i_0, i_1) \in B$ であるから $M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) \cap F \neq \phi$

そこで

$V_1 = M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) \cap F$

$U_1 = M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) - F$ とおくと

$(M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)))' = U_1 \cup V_1'$ であり，従って

$M'\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) = M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) \cup U_1 \cup V_1'$

ここで $U_1 \subseteq M\ (s_0, x\ (i_0, i_1))$ であるから

$M'\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) = M\ (s_0, x\ (i_0, i_1)) \cup V_1'$ となる。

ここで $V_1 \subseteq F$ であるから $V_1' \subseteq F'$ であり

$V_1 \cap F = V_1 \neq \phi$ であるから $V_1' \neq \phi$

すなわち Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ が $x\ (i_0, i_1)$ 上を s_0 で start すると点 i_1 に於いて少なくとも1つの F' の状態 $v' \in V_1'$ が出現する。

〔**Induction Step**〕 $x\ (i_k, i_{k+1}) \in B\ (k=0, 1, \cdots, n-1)$ について各点 i_{k+1} でそれぞれ少なくとも1つの F' の state が出現していると仮定して点 i_{n+1} にも少なくとも1つの F' の state が出現することを言う。

点 i_n で現われた F' の元 f' を1つ固定する。

M' の定義により

$$\begin{aligned} M'\ (f', x\ (i_n, i_{n+1})) &= M'\ (s_0, x\ (i_n, i_{n+1})) \\ &= M\ (s_0, x\ (i_n, i_{n+1})) \cup (M\ (s_0, x\ (i_n, i_{n+1})))' \end{aligned}$$

となるが，今度は $x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ B$ を使って Basis での議論と同様にして

$$M'\ (f',\ x\ (i_n,\ i_{n+1}))=M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1}))\ \cup V'_{n+1}$$

なる F' の空でない部分集合 V'_{n+1} を得る。

従って点 i_{n+1} に於いても少なくとも 1 つの F' の state $v'\ \epsilon\ V'_{n+1}$ が出現していることになる。これで $B^\omega \subseteq T_\omega\ (\mathfrak{B}')$ が確立された。

今度は逆の包含関係を示す。

$x\ \epsilon\ T_\omega\ (\mathfrak{B}')$ をとると

$\exists \gamma'\ \epsilon\ Rn\ (\mathfrak{B}',\ x)$ 〔$\gamma'\ (0)=s_0\ \&\ In\ (\gamma') \cap F' \neq \phi$〕となる。

$f'\ \epsilon\ In\ (\gamma') \cap F'$ を 1 つ固定し f' が run γ' 中に出現する点を $i_1<i_2<i_3<\cdots$ $<i_n<i_{n+1}<\cdots$ とおく。

ただし $i_1>0$ とする。

f' が無限回あらわれたということは s_0 へのバトンタッチが無限回行われたことを意味し，かかる f' が存在するということは $n\geq 0$ を任意に固定したとき

$$M'\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1}))=(M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1}))\ \cup\ (M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1})))')\ \ni f'$$

なることである。$f' \notin M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1}))$ であるから $f'\ \epsilon\ (M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1})))'$ となり D' にプライム付きの state が出現するためには $D \cap F \neq \phi$ であることが必要十分であるから $M\ (s_0,\ x\ (i_n,\ i_{n+1})) \cap F \neq \phi$ となる。

従ってすべての $n\geq 0$ に対して $x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ B.$

すなわち無限系列 $0<i_1<i_2<i_3<\cdots\cdots$ が存在して，すべての $n\geq 0$ に対して $x\ (i_n,\ i_{n+1})\ \epsilon\ B$ が成り立っている。よって $x\ \epsilon\ B^\omega.$

これで B^ω を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{B}'$ の存在が証明されたが，次に $A \subseteq \Sigma^*$ を受理する $\mathfrak{A}$ とこの $\mathfrak{B}'$ とから AB^ω を定義する Büchi オートマトン $\mathfrak{C}$ の構成を考えよう。

今，AB^ω の任意の元 x をとる。すると適当な $y\ \epsilon\ A,\ z\ \epsilon\ B^\omega$ が存在して $x=y\cdot z$ と書けるから y を受理した後，バトンタッチを行って後ろの z を定義するような機械を作れば良いということになる。

ここで y はこれ以上 A の元に細分できないものとする。$y,\ z$ について

$$y\ \epsilon\ T\ (<S'',\ M'',\ s_0'',\ F''>)$$

$z \in T_\omega$ $(<S \cup F', M', s_0, F'>)$

であるから

① $\mathfrak{C}$の初期状態は$\mathfrak{A}$のs_0''をそのままとって来る。

② $\mathfrak{C}$の final state set は$\mathfrak{B}'$のF'をとって来る。

③ $\mathfrak{C}$の状態関数M'''は

(i) s_0''で出発してまだS''の状態で走っているときは$\mathfrak{A}$と同じように走るが final state set F'' の元に落ちたときはひき続きそのまま走らせるか，又は$\mathfrak{B}'$の初期状態s_0にバトンタッチするかのこの両方を準備しておく。

(ii) s_0にバトンタッチして RE-START し $S \cup F'$ の state にいったん移ってしまえば，あとは$\mathfrak{B}'$を走らせれば良い。つまりM'と同じように動く。

④ $\mathfrak{C}$の状態集合はM'''の定義で考えたように run 中に$\mathfrak{A}$の state と$\mathfrak{B}'$の state が時をずらして出現するから$S'' \cup (S \cup F')$として準備しておけば良い。ただし$S'' \cap (S \cup F') = \phi$としておく。

すなわち求むる$\mathfrak{C}$は

$\mathfrak{C} = <S'' \cup S \cup F', M''', s_0'', F'>$ で

$M''' : (S'' \cup S \cup F') \times \Sigma \to 2^{S'' \cup S \cup F'}$ は次の通りである。

まず$\mathfrak{A}$の state $s \in S''$ については次の2通りの場合がある。

(i) $s \in S'' - F''$ のときは$\mathfrak{A}$とまったく同じで

$$M''' (s, \sigma) = M'' (s, \sigma)$$

(ii) $s \in F''$ のときはバトンタッチを考えるから

$$M''' (s, \sigma) = M'' (s, \sigma) \cup M' (s_0, \sigma)$$

これで$\mathfrak{B}'$に制御が渡れば

(iii) $s \in S \cup F'$ のとき$\mathfrak{B}'$と同じように動けば良いから

$$M''' (s, \sigma) = M' (s, \sigma)$$

さて $AB^\omega = T_\omega (\mathfrak{C})$ は次のようにして確かめれば良い。

$x \in AB^\omega$ とすると適当な $y \in T(\mathfrak{A})$, $z \in T_\omega (\mathfrak{B}')$ に対して $x = y \cdot z$ と書ける。従ってまず $\gamma(0) = s_0''$ で $M'' (s_0'', y) \cap F'' \ni s$ なるsが存在するから

$$M''' (s, z_0) = M'' (s, z_0) \cup M' (s_0, z_0)$$

により $\mathfrak{B}'$ に制御が渡されて $z \in T_\omega(\mathfrak{B}')$ により $In(\gamma) \cap F' \neq \phi$ となる $\mathfrak{C}$ の run γ が得られる。

よって $x \in T_\omega(\mathfrak{C})$

逆に $x \in T_\omega(\mathfrak{C})$ とすると

$\exists \gamma \in Rn(\mathfrak{C}, x) [\gamma(0) = s_0'', In(\gamma) \cap F' \neq \phi]$

$In(\gamma) \cap F' \ni f'$ を1つ固定して f' が出現する点を $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ とすると $\mathfrak{B}'$ の acceptance と同様にして x の suffix $z \in T_\omega(\mathfrak{B}')$ の存在が言えて $x = y \cdot z$ とおける。あとは prefix y が $\mathfrak{A}$ によって受理されることを言えば良い。

z はは最初 s_0 で scan され始めたのであるから，或る $s \in F''$ が s_0 にバトンタッチされたと考えられる。すなわち $M'''(s_0'', y) \cap F'' \neq \phi$ となる prefix y が存在する。

ところで $M'''(s_0'', y) \subseteq S'' \cup (S \cup F')$ であるが，これが $S \cup F'$ の部分集合ということはあり得ない。$S'' \cap (S \cup F') = \phi$ であったから $M'''(s_0'', y) \subseteq S''$ である。よって $M'''(s_0, y) = M''(s_0'', y)$

従って $M''(s_0'', y) \cap F'' \neq \phi$ よって $y \in T(\mathfrak{A})$.

これで $x = y \cdot z$ となる $y \in A$, $z \in B^\omega$ の存在が言えて $x \in AB^\omega$ である。

これで定理 3.2 のすべての証明が完結した。 ⊠

この表現定理を使って Büchi automaton definability と次節に述べる Muller automaton definability との同等性を明らかにすることができる。

定理 3.1 と定理 3.2 との間には特別な関連はない。ただ両定理とも Büchi automaton definable set についての性質を述べたものであり定理 3.1 は Büchi automaton definable sets のクラスの projection の下での閉包性を，定理 3.2 は Büchi automaton definable set の有限個の regular sets による decomposition の可能性をそれぞれ述べたものである。

§ 4. Muller オートマトン

本節では D. E. Muller によって導入された狭い意味での Muller オートマトンとこれを変形してできた広い意味での Muller オートマトンについて，それぞれ言及

しこれら２つの ω 型有限オートマトンが実はまったく同じ能力を持つことを明らかにする。更に Muller automaton definable sets のクラスのブール演算の下での閉包性も論ずる。

定義 4.1 決定性の有限オートマトン $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, F>$ で $F\subseteq 2^S$ のとき，すなわち F が S の部分集合から成る集合になっているとき $\mathfrak{A}$ を狭義の Muller オートマトンと呼ぶ。

$x\in T_\omega(\mathfrak{A})$，すなわち $x\in\Sigma^\omega$ が狭い意味での Muller オートマトンによって定義されるということを次の式で定義する。

$\exists\gamma\in Rn(\mathfrak{A}, x)\,[\gamma(0)=s_0\ \&\ In(\gamma)\in F]$

かかる acceptance を 3–acceptance ということもある。〔5〕

定義 4.2 決定性の有限オートマトン $\mathfrak{A}=<S, M, s_0, \Omega>$ を広義の Muller オートマトンという。ここに Ω は S の有限個の部分集合の組 (L_i, U_i)；$i=0, 1, \cdots, n-1$ から成る集合

$\Omega=\{(L_i, U_i)\mid i<n\}$

である。

$\gamma:\omega\to S$ が Ω のタイプであるということを

$\exists i<n\,[In(\gamma)\cap L_i=\phi\ \&\ In(\gamma)\cap U_i\neq\phi]$

で定義しこのことを $\gamma\in[\Omega]$ であらわす。

$x\in\Sigma^\omega$ が広い意味での Muller オートマトン $\mathfrak{A}$ で定義されるということを $x\in T_\omega(\mathfrak{A})$ であらわしこれを次の式で定義する。

$\exists\gamma\in Rn(\mathfrak{A}, x)\,[\gamma(0)=s_0\ \&\ \gamma\in[\Omega]]$

定義 4.3 $\Sigma=A_0\times A_1\times\cdots\times A_n$ として $x\in\Sigma^\omega$ とする。すなわち

$$x=x_0\ x_1\ x_2\cdots x_k\cdots=\begin{matrix} a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & \cdots\cdots & a_0^k & \cdots\cdots \\ a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots\cdots & a_1^k & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_i^0 & a_i^1 & a_i^2 & \cdots\cdots & a_i^k & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots\cdots & a_n^k & \cdots\cdots \end{matrix}$$

とあらわすことができる。

ここに $\exists i \leq n \ \forall k \in \omega \ a_i^k \in A_i$ である。

このとき直積集合 Σ から A_i への射影 p_i を次のように Σ^ω から A_i^ω への写像に拡張する。

すなわち $x = x_0 \ x_1 \ x_2 \cdots x_k \cdots \in \Sigma^\omega$ に対し

$$p_i(x) = p_i(x_0) \ p_i(x_1) \ p_i(x_2) \ \cdots p_i(x_k) \ \cdots$$
$$= a_i^0 \ a_i^1 \ a_i^2 \ \cdots\cdots a_i^k \ \cdots\cdots$$

と定める。

以下 Muller automaton definable sets のクラスの様々な性質を論じてゆく。まず定義 4.1 と 4.2 で見た狭い意味での Muller オートマトンと広い意味での Muller オートマトンとの，集合の定義能力についての同等性を証明しよう。

定理 4.1 狭い意味での Muller オートマトンによって定義される集合のクラスを $\mathscr{L}_N$，広い意味での Muller オートマトンによって定義される集合のクラスを $\mathscr{L}_W$ とすると $\mathscr{L}_N = \mathscr{L}_W$ である。

〔**証明**〕 まず $\mathscr{L}_W \subseteq \mathscr{L}_N$ なる包含関係から確立する。$\mathfrak{A}_1 = <\bar{S}, \overline{M}, \bar{s}_0, \Omega>$ を与えられた広義の Muller オートマトンとし，$\Omega = \{(L_i, U_i) \mid i < n\}$ から次のように狭義の Muller オートマトン $\mathfrak{A}$ を作る。

$$\mathfrak{A} = <\bar{S}, \overline{M}, \bar{s}_0, F>$$

ただし $F = \{S' \subseteq \bar{S} \mid \exists i < n \ [S' \cap L_i = \phi \ \& \ S' \cap U_i \neq \phi]\}$ とする。このとき

$$In(\gamma) \in F \ \ iff \ \ \exists i < n \ [In(\gamma) \cap L_i = \phi \ \& \ In(\gamma) \cap U_i \neq \phi]$$

であるから $T_\omega(\mathfrak{A}_1) = T_\omega(\mathfrak{A})$ が成り立つ。

次に $\mathscr{L}_N \subseteq \mathscr{L}_W$ を確立する。すなわち狭義の Muller オートマトン $\mathfrak{A}$ が与えられて，これと同等な広義の $\mathfrak{A}_1$ を作ることを考える。

与えられた狭義の Muller オートマトンは $\mathfrak{A} = <S, M, s_0, F>$ で $F = \{S_0, S_1, \cdots, S_{k-1}\}$ とする。ここに $S_i \ (i = 0, 1, \cdots, k-1)$ は S の空でない部分集合である。次のように $\mathfrak{A}_1 = <\bar{S}, \overline{M}, \bar{s}_0, \Omega>$ を作る。

すなわち

(i) $\bar{S} = 2^{S_0} \times 2^{S_1} \times \cdots \times 2^{S_{k-1}} \times S$

(ii)
$$\bar{s}=\begin{pmatrix}T_0\\T_1\\\vdots\\T_{k-1}\\t\end{pmatrix},\ \bar{s}'=\begin{pmatrix}T'_0\\T'_1\\\vdots\\T'_{k-1}\\t'\end{pmatrix}\ \text{ただし}\ T_i,\ T_i'\subseteq S_i\,;t,\ t'\in S$$

に対して $\overline{M}\ (\bar{s},\ \sigma)=\bar{s}'$ であるのは次の条件が成り立つときである。

(a) $i=0,\ 1,\cdots,k\text{-}1$ のとき $T_i\subseteq S_i$ であるから次の2つの場合に分けて考える。

case 1 $T_i=S_i$ のとき $T_i'=\phi$

case 2 $T_i\subsetneqq S_i$ のとき $T_i'=S_i\cap(T_i\cup\{t\})$

$$=\begin{cases}T_i & t\notin S_i\ \text{のとき}\\ T_i\cup\{t\} & t\in S_i\ \text{のとき}\end{cases}$$

つまり0から $k-1$ までの element については σ に依存しないで T_i のままか又は t を付け加えるかのいずれかで単調非減少で S_i に到達する。一旦 S_i になると再び ϕ にもどって今の推移を繰り返す。

(b) $i=k$ のときは $M\ (t,\ \sigma)=t'$ が成り立っている。

(iii)
$$\bar{s}_0=\begin{pmatrix}\phi\\\phi\\\vdots\\s_0\end{pmatrix}$$

(iv) $\Omega=\{(L_i,\ U_i)\,|\,i=0,\ 1,\cdots,\ k-1\}$ である。ただし

$$L_i=\left\{\begin{pmatrix}T_0\\\vdots\\T_{k-1}\\t\end{pmatrix}\in\overline{S}\,|\,t\notin S_i\right\},\ U_i=\left\{\begin{pmatrix}T_0\\\vdots\\T_i\\\vdots\\T_{k-1}\\t\end{pmatrix}\in\overline{S}\,|\,T_i=S_i\right\}$$

さてかかる $\mathfrak{A}_1$ について $T_\omega\ (\mathfrak{A})=T_\omega\ (\mathfrak{A}_1)$ が成り立つことを見てみよう。

$x\in T_\omega\ (\mathfrak{A})$ とすると $\exists\gamma\in Rn\ (\mathfrak{A},\ x)\ [\gamma\ (0)=s_0\ \&\ In\ (\gamma)\in F]$. よって適当な $i<k$ に対し $In\ (\gamma)=S_i$ とおける。今 $\mathfrak{A}_1$ による x 上の run を $\bar{\gamma}:\omega\to\overline{S}$ とすると状態ベクトルの k 番目の要素の推移が $\mathfrak{A}$ の run になっているから

$$In\ (\bar{\gamma})=\{\bar{s}\,|\,p_k\ (\bar{s})\in In\ (\gamma)=S_i\}$$

ところが

$$L_i=\{\bar{s}\,|\,p_k\ (\bar{s})\notin S_i\}$$

であるからこのような i について

$In(\bar{\gamma})\cap L_i=\phi$

更に $U_i=\{\bar{s}\mid p_i(\bar{s})=S_i\}$ であるから

$In(\bar{\gamma})\cap U_i=\{\bar{s}\mid p_k(\bar{s})\in S_i\ \&\ p_i(\bar{s})=S_i\}$ となるが $S_i\neq\phi$ であるから

$p_i(\bar{s})=S_i\in 2^{S_i}$, $p_k(\bar{s})=t\in S_i\subseteq S$ なる形をした状態ベクトル $\bar{s}$ が実際に存在して

$In(\bar{\gamma})\cap U_i\neq\phi$

従って $\exists i<k\,[In(\bar{\gamma})\cap L_i=\phi\ \&\ In(\bar{\gamma})\cap U_i\neq\phi]$ が成り立ち，よって $\bar{\gamma}\in[\Omega]$

すなわち $x\in T_\omega(\mathfrak{A}_1)$

逆に $x\in T_\omega(\mathfrak{A}_1)$ を任意にとると

$\exists\bar{\gamma}\in Rn(\mathfrak{A}_1, x)\ \exists i<k\,[In(\bar{\gamma})\cap L_i=\phi\ \&\ In(\bar{\gamma})\cap U_i\neq\phi]$ が成り立っている。

$In(\bar{\gamma})\cap L_i=\phi$ であるから $\forall\bar{s}\,[\bar{s}\in In(\bar{\gamma})\rightarrow\bar{s}\notin L_i]$

ここで $\bar{s}\notin L_i$ iff $p_k(\bar{s})\in S_i$

$\bar{s}\in In(\bar{\gamma})$ iff $p_k(\bar{s})\in In(p_k(\bar{\gamma}))$

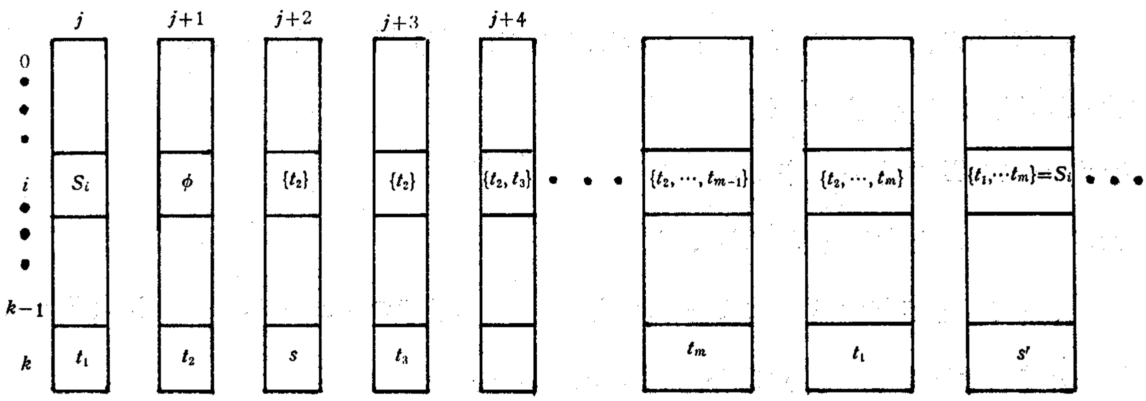
であるから

$\forall\bar{s}\,[p_k(\bar{s})\in In(p_k(\bar{\gamma}))\rightarrow p_k(\bar{s})\in S_i]$

よって $In(p_k(\bar{\gamma}))\subseteq S_i$

一方 $In(\bar{\gamma})\cap U_i\neq\phi$ から $p_i(\bar{s})=S_i$ なる形をした有限個の $\bar{s}$ のうち少なくとも1つは $\mathfrak{A}_1$ による run の中に無限回出現していなければならない。

$\overline{M}$ の定義により x_j を $p_i(\bar{s})=S_i$ なる $\bar{s}$ が scan していると x_{j+1} を scan するのは $p_i(\bar{s})=\phi$ なる $\bar{s}$ であり，$p_k(\bar{s})\in S_i$ なる S の状態がベクトルの k 番目の要素に出現する毎に $p_i(\bar{s})$ は単調非減少で増えてゆき，再び $p_i(\bar{s})=S_i$ となりこの過程を無限回繰り返す。 $S_i=\{t_1,\cdots,t_m\}$ としたときの様子を下図に示す。



このように S_i が無限回出現しているならば S_i の元はすべてそれ以前に k 番目の要素として無限回出現していなければならない。

よって $S_i \subseteq In\ (p_k\ (\bar{\gamma}))$

従って $In\ (p_k\ (\bar{\gamma})) = S_i \in F$ となりかかる $\mathfrak{A}$ の run $p_k\ (\bar{\gamma})$ の存在することが言えて $x \in T_\omega\ (\mathfrak{A})$

従って $T_\omega\ (\mathfrak{A}_1) = T_\omega\ (\mathfrak{A})$.

これで与えられた $\mathfrak{A}$ から同等な $\mathfrak{A}_1$ が作れたことになる。以上により $\mathscr{L}_N = \mathscr{L}_W$ が示された。 ⊠

この結果 Muller automaton definable sets のクラスを考えるとき，敢えて広義の Muller オートマトンと狭義の Muller オートマトンとを区別して考える必要はなく，必要に応じてそのどちらでも考えることができるようになる。

次に Muller automaton definable sets のクラスのブール演算の下での閉包性について論じる。まず union の下での閉包性を確立しよう。

定理 4.2 Muller automaton definable sets のクラスは $\cup$ の下で閉じている。

〔**証明**〕 $A, B \subseteq \Sigma^\omega$ はそれぞれ広義の Muller オートマトン

$$\mathfrak{A} = \langle S, M, s_0, \Omega_1 \rangle \qquad \mathfrak{B} = \langle S', M', s_0', \Omega_2 \rangle$$

によって definable であるとする。ただし

$\Omega_1 = \{(L_i, U_i) \mid i < n\}$, $\Omega_2 = \{(L_i', U_i') \mid i < m\}$ とする。

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ から次なる Muller オートマトン $\mathfrak{C}$ を構成する。

$$\mathfrak{C} = \left\langle S \times S', M'', \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0' \end{bmatrix}, \Omega \right\rangle$$

ただし $M''\left(\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}, \sigma\right) = \begin{bmatrix} M\ (s, \sigma) \\ M'\ (s', \sigma) \end{bmatrix}$

$\Omega = \{(L_i \times S', U_i \times S') \mid i < n\} \cup \{(S \times L_i', S \times U_i') \mid i < m\}$ である。

$A \cup B = T_\omega\ (\mathfrak{C})$ を証明する。

まず $x \in A \cup B$ をとって来る。

case 1 $x \in A$ とすると $x \in T_\omega\ (\mathfrak{A})$.

よって x を定義する $\mathfrak{A}$ による run と $\mathfrak{B}$ による任意の run とから $\gamma \in Rn\ (\mathfrak{C}, x)$ を構成することができて $p_0 \gamma \in [\Omega_1]$ である。

すなわち

$\exists i<n\ [In\ (p_0\gamma)\cap L_i=\phi\ \&\ In\ (p_0\gamma)\cap U_i\neq\phi]$.

かかる i について $In\ (p_0\gamma)\cap U_i\neq\phi$ であるから，或る $s\in U_i$ は x 上の $\mathfrak{A}$ による run の中で無限回 出現している。

従って $\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}$ なるタイプの $\mathfrak{C}$ の状態が x の $\mathfrak{C}$ による run の中に無限回出現することになるが $s'\in S'$ は有限個しか存在しないので $\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\in U_i\times S'$ のうちの幾つかが無限回，$\gamma\in Rn\ (\mathfrak{C},\ x)$ の中に現われるということになる。

すなわち $In\ (\gamma)\cap\ (U_i\times S')\ \neq\phi$.

一方 $In\ (p_0\gamma)\cap L_i=\phi$ であるから

$\forall s\in S\ [s\in In\ (p_0\gamma)\ \rightarrow\ s\notin L_i]$

従ってどんな $s'\in S'$ に対しても $\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\notin L_i\times S'$

すなわち $\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\in In\ (\gamma)\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\notin L_i\times S'$

よって $In\ (\gamma)\cap\ (L_i\times S')=\phi$

以上により

$\exists i<n\ [In\ (\gamma)\cap\ (L_i\times S')=\phi\ \&\ In\ (\gamma)\cap\ (U_i\times S')\ \neq\phi]$

すなわち $\gamma\in[\Omega]$，よって $x\in T_\omega\ (\mathfrak{C})$

case 2　$x\in B$ の場合も同様である。

これで $A\cup B\subseteq T_\omega\ (\mathfrak{C})$ が示された。

次に $x\in T_\omega\ (\mathfrak{C})$ としたとき $x\in A\cup B$ となることを証明する。

$x\in T_\omega\ (\mathfrak{C})$ とすると

$\exists i<n\ [In\ (\gamma)\cap\ (L_i\times S')=\phi\ \&\ In\ (\gamma)\cap\ (U_i\times S')\ \neq\phi]\ \vee$

$\exists i<m\ [In\ (\gamma)\cap\ (S\times L_i')=\phi\ \&\ In\ (\gamma)\cap\ (S\times U_i')\ \neq\phi]$ が成り立っている。

case 1　$\exists i<n\ [\ In\ (\gamma)\cap\ (L_i\times S')=\phi\ \&\ In\ (\gamma)\cap\ (U_i\times S')\ \neq\phi]$ のとき，

かかる i について $In\ (\gamma)\cap\ (L_i\times S')=\phi$ であるから

$\forall s\in S\ \forall s'\in S'\ \left[\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\in\ (L_i\times S')\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix}\notin In\ (\gamma)\right]$.

L_i, S' は有限集合でその元の組のいづれも $In\ (\gamma)$ の元になり得ないから L_i の元，すなわち組の第1要素だけをとっても $\forall s\in S\ [s\in L_i\ \rightarrow\ s\notin In\ (p_0\gamma)]$

が成り立っている。

よって $In\ (p_0\gamma) \cap L_i = \phi$

更に $In\ (\gamma) \cap \ (U_i \times S') \neq \phi$ であるから

$\exists s \in S\ \exists s' \in S' \left[\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix} \in (U_i \times S')\ \&\ \begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix} \in In\ (\gamma) \right].$

かかる $s \in U_i$ をとって来て

$s \in U_i\ \&\ s \in In\ (p_0\gamma)$

を成立せしめることができる。

よって $In\ (p_0\gamma) \cap U_i \neq \phi$

従って $\exists i < n [In\ (p_0\gamma) \cap L_i = \phi\ \&\ In\ (p_0\gamma) \cap U_i \neq \phi]$

よって $x \in T_\omega\ (\mathfrak{A}) = A$ ゆえに $x \in A \cup B$

case 2 $\exists i < m\ [In\ (\gamma) \cap \ (S \times L_i') = \phi\ \&\ In\ (\gamma) \cap \ (S \times U_i') \neq \phi]$ のときも同様にして $x \in T_\omega\ (\mathfrak{B}) = B$ を得て $x \in A \cup B$ が言える。

以上により $T_\omega\ (\mathfrak{C}) = A \cup B$ が言えて定理が成り立つ。 ⊠

定理 4.3 Muller automaton definable sets のクラスは補集合をとる演算の下で閉じている。

〔証明〕 今度は狭い意味での Muller オートマトンを考えれば良い。

すなわち $A \subseteq \Sigma^\omega$ が $\mathfrak{A} = <S, M, s_0, F>$ で definable であるとすれば

$\mathfrak{A}' = <S, M, s_0, 2^S - F>$ を作ってやれば $T_\omega\ (\mathfrak{A}') = \Sigma^\omega - A$ となる。 ⊠

定理 4.4 Muller automaton definable sets のクラスはブール代数系である。

〔証明〕 あとは intersection の下で閉じていることを言えば良いのであるが，これは次の式から明らかである。

$A \cap B = \sim\ (\sim A \cup \sim B)$ ⊠

Muller automaton definable sets のクラス，これは "ω–Regular sets のクラス" とも言うべき集合のクラスであることが Choueka〔6〕で論じられている。

このクラスについてのブール演算以外の種々の演算の下での閉包性を論じてみるのも興味深いものである。

§5. む す び

本稿は有限オートマトンが無限テープ上を走ったとき，正規集合についての結果と異なるどのような結果があらわれるであろうかという筆者の一連の考察に対する一種の review であり，文献〔1〕〔2〕及び〔5〕の中で得られている幾つかの結果を通常の有限オートマトン論との関連の上で再検討したものである。すなわち無限テープ上を走る有限オートマトンの acceptance についてまず再検討し異なる3つの形式化が得られることを見てきた。第3節では J. R. Büchi の提案による Büchi オートマトンとこの機械の定義する集合に関する2つの結果を検討し，その解説と証明を与えた。第4節では他のタイプの ω 型有限オートマトンとして2種類の Muller オートマトンを挙げ，これらの機械の同等性と定義される集合のクラスの閉包性を論じた。

本稿で述べた3つの ω 型有限オートマトンのうち第3節で論じた Büchi オートマトンは finite word から infinite word への入力語の拡張に対し，その acceptance も拡張しやすく他の2種類の Muller オートマトンよりも“有限”から“無限”へのアプローチが容易である。しかしながら定式化が異なってもこれら3つの ω 型有限オートマトンの定義する集合のクラスはすべて一致するという〔6〕の結果は大変興味深いものである。この詳細は別の機会に譲るとして定理3.1は finite word についても成り立つ特別面白い結果ではないが，定理3.2は ω 型言語と通常の有限長の word を元とする言語との間の関係を示す非常に興味深い結果である。文献〔5〕では ω–Context–Free Languages についても定理3.2のような表現定理が成り立つことを得ているので今後は ω–Context–Sensitive Languages の定式化とその表現定理の確立が課題となろう。

第4節の定理4.1を機械の定義だけからすぐに類推するのはむずかしい。今回述べた証明はやや技巧的であるのでよりイメージを想い浮かべやすい証明を考えてみたい。定理4.2，4.3及び4.4は通常の有限長の word を元とする言語に対する取り扱いとまったく同じである。筆者が〔3〕で得た ω–Languages のクラスはブール代数系でなかったが， Muller オートマトンによる ω–Regular sets のクラスは

ブール代数系となっている。このように Büchi, Muller 流の無限テープに対する acceptance の定義は Hartmanis and Stearns〔7〕のそれよりもより "fruitful" であると言えるので今後はかかる集合のクラスの他の種々の演算の下での閉包性についても調べてみたい。

最後に日ごろのセミナーに於いて貴重な御助言を賜る法政大学　田中尚夫教授及び資料を送って頂いた東京工業大学　小林孝次郎助教授に深謝致します。

〔1〕竹内外史，(1977～8)，「オートマトン入門（上），（中），（下）」，数学セミナー VOL 16, pp. 59—64, VOL 17, pp. 51—59, 82—87.

〔2〕高橋正子，(1978)，「形式言語学プリント」，東京工業大学大学院情報科学専攻昭和53年度前期テキスト

〔3〕高橋信行，(1978)，「有限オートマトンによる実数の定義可能性」，横浜商大論集第12巻第1号 pp. 132—155.

〔4〕Salomaa, A, (1973), "Formal Languages", Academic Press

〔5〕Cohen, R. S and Gold, A. Y, (1977), "Theory of ω-Languages. I : Characterization of ω-Context-Free Languages", Journal of Computer and System Science, VOL 15, pp. 169—184.

〔6〕Choueka, Y, (1974), "Theories of Automata on ω-Tapes : A Simplified Approach", Journal of Computer and System Sciences, VOL 8, pp. 117—141.

〔7〕Hartmanis, J and Stearns, R. E, (1967), "Sets of Numbers Defined by Finite Automata", American Math. Monthly, VOL 74, pp. 539—542.