有限オートマトンによる実数の定義可能性

高　橋　信　行

§1　ま　え　が　き

有限オートマトンの受理能力については従来より様々な研究がなされ既に数多くの結果が得られているが（〔1〕,〔2〕）本稿は有限オートマトンの受理能力を利用してある実数の集合を定義し，この集合（*FA*–definable set）の種々の性質を論じたものである。有限オートマトンによる実数の定義は Hartmanis & Stearns〔4〕で提出されたものであるが，本稿では文献〔4〕にない新しい結果が幾つか得られている。

有限オートマトンによる実数の定義可能性……*FA*–定義可能性は一定の実数区間 $\boldsymbol{I}=(0,\ 1)$ 上での議論であるが，開区間 $\boldsymbol{I}$ は位相写像 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x(x-1)}$ により実数の全体 $\boldsymbol{R}$ に拡張されるから $\boldsymbol{I}$ 上での位相的性質がその一般性を失うことはない。

直観的に述べれば有限オートマトンが区間 $\boldsymbol{I}$ の実数 x を定義するとは，x の小数点以下を任意の長さで区切っても，その区切られた有限列が有限オートマトンによって受理されるということである。このような無限の情報を含んだ実数を任意の長さで固定し，それを有限回の具現的な手続きで処理することが有限オートマントによる実数の定義可能性の本質である。

Hartmanis & Stearns〔4〕は上記のように定義された実数の集合の位相的性質を考察し，

（i）もしも機械が Prefix Automaton であればこの集合は閉集合となり

(ii) 定義された集合が trivial でない区間を含めば，このような区間の極大なものの両端は有理数であり，そして

(iii) この集合の測度は有理数であることを示した。

本稿では文献〔4〕で与えられた上記の結果にもとづき

(1) 異なる radix アルファベットのもとでも R-equivalent な有限オートマトンが存在すること

(2) Prefix でしかも R-equivalent な有限オートマトンが存在すること

(3) 勝手に与えられた有理閉区間を定義する有限オートマトンが構成できること，および

(4) FA-定義可能な集合のクラスはブール代数をなさないこと

等が論じられる。

§2 記号と準備

（本節では文献〔1〕，〔2〕を参考にさせていただいた。）

言　語

ある空でない有限集合 Σ をとりあげ Σ をアルファベットと呼び，その元を文字（letter）または記号（symbol）と呼ぶ。

Σ の文字の有限列

$a_1 a_2 \cdots a_n$；($i=1, 2, \cdots, n$ に対し $a_i \in \Sigma$) を Σ 上の語（word）または列（string）といい x, y, z などの文字であらわす。

$$x=a_1 a_2 \cdots a_n$$

のとき，x に重複を許して含まれる文字の個数 n を語 x の長さ（length）といい，$|x|$ であらわす。

文字を含まない列をも語とみなし空語（the empty word）と呼ぶ。$|\varepsilon|=0$ である。

空語も含めたすべての語の集合を Σ^* であらわし，空語をとり除いたす

べての語の集合は Σ^+ であらわす。

$x, y \in \Sigma^*$ であるとき $x=y$ とは

x, y ともに ε であるか，x も y も ε でないときは，$|x|=|y|(\neq 0)$ で

$$x=a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$y=b_1 b_2 \cdots b_n \ ; \ a_i, \ b_i \in \Sigma$$

であるとき $a_i=b_i$ $(i=1, 2, \cdots n)$ である；

として語の相等を定める。

Σ^* の任意の2つの語，x, y に対してその積（concatenation）xy が，つぎのように定められる。

$$x=a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$y=b_1 b_2 \cdots b_m \ ; \ a_i, \ b_j \in \Sigma$$

であるとき

$$xy=a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

ただし

$$x\varepsilon=\varepsilon x=x$$

とする。

このようにして集合 Σ^* は積を演算として

$$x(yz)=(xy)z$$

$$x\varepsilon=\varepsilon x=x \ ; \ x, \ y, \ z \in \Sigma^*$$

の条件を満たし，Σ の要素を生成元とする自由半群となる。

$aa=a^2$，$aaabb=a^3b^2$ などと同じ文字の積は正整数の指数で示される。また任意の $a \in \Sigma$ に対して $a^0=\varepsilon$ と定める。

空集合 ϕ も含めて Σ^* の任意の部分集合 L を Σ 上の言語（language）という。濃度は高々可算である。すべての言語のクラスは Σ^* の部分集合族 2^{Σ^*} であり濃度は連続の濃度である。

言語の認識は次のように定式化される。

有限オートマトン

アルファベットΣ上の有限オートマトンMとは，次のような 5-tupple $(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ のことである。ここに

(i) Kは状態 (state) の空でない有限集合。

(ii) Σは入力記号の有限アルファベット (input alphabet).

(iii) δは$K\times\Sigma$ からKの中への関数で状態関数と呼ばれる。

(iv) q_0は初期状態 (initial state) で Kに属し

(v) Fは最終状態の集合 (final state set) で $F\subseteq K$ である。

δは$K\times\Sigma$ から K への関数であるが

$$\delta(q, \varepsilon)=q$$

任意の $x\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$ について

$$\delta(q, xa)=\delta(\delta(q, x), a)$$

として $K\times\Sigma^*$ からKへの関数に容易に拡張できる。

語xは$\delta(q_0, x)=p$ なるpがFに属すとき，Mによって受理(accept)されるという。Mによって受理されるすべての語の集合を$L(M)$であらわす。すなわち

$$L(M)=\{x\in\Sigma^* \mid \delta(q_0, x)\in F\}$$

である。

$L(M)$に関して次の命題が成り立つ。

命題 2.1 つぎの (i), (ii) は同等である。

(i) Σ^*を有限個の同値類に分割する右不変の同値関係がΣ^*に定義されて，$L(M)$はその同値類のいくつかの和集合としてあらわされる。

(ii) Σ^*の元x, y に対し xRyであるとは，すべてのzについて $xz\in L(M)$ *iff* $yz\in L(M)$ である；として同値関係Rを定義するとこの

関係 R の指数は有限である。

Σ 上の言語 $L(M)$ についての他の特徴付けについては，たとえば〔2〕，〔3〕を参照されたい。

§3 *FA*-定義可能性

定義 3.1 自然数 $p>1$ を固定する。M はある有限オートマトンで M の入力記号の集合 $\Sigma^{(p)}$ は任意の自然数を p 進法で表現するときに使われる p-1 以下の数からなる有限集合であるとする。すなわち

$$\Sigma^{(p)}=\{0,\ 1\cdots,\ p-1\}$$

である。

$\boldsymbol{I}=(0,\ 1)$ の実数 x の $\Sigma^{(p)}$ 上の p 進展開とは，適当な関数 $\delta:\boldsymbol{N}\to\Sigma^{(p)}$ について

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{p^n}=0.\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)\cdots$$

と書けることである。

ここで上記の関数列が任意の x に対して一意的に定まるために σ の値が，あるところから先すべて $p-1$ となるものは除くものとする。またこの関数列を $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$ であらわすこともある。$\Sigma^{(p)}$ 上の infinite sequence $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m\cdots\sigma_n\cdots$ に対し σ の subsequence $\sigma_m\cdots\sigma_n$ を ${}_m\bar{\sigma}_n$ であらわす。特に prefix $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ を $\bar{\sigma}_m$，surfix $\sigma_n\cdots$ は ${}_n\bar{\sigma}$ であらわす。

定義 3.2 (0, 1) の実数 x が $\Sigma^{(p)}$ 上の有限オートマトン M によって定義されるとは，x の p 進展開 $x=0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$ が存在してすべての n に対して $\bar{\sigma}_n\in L(M)$ となることである。$\Sigma^{(p)}$ 上の有限オートマトン M によって定義される実数の全体を $R_M^{(p)}$ であらわす。

適当な有限オートマトン M について $\boldsymbol{I}=(0,\ 1)$ の部分集合 S が $S=R_M$ を満たすとき集合 S は *FA*-定義可能であるといわれる。

定義 3.3 有限オートマトン $M,\ N$ が *R*-eqivalent であるとは，$R_M=R_N$

なることである。

定義 3.4　有限オートマトン M が Prefix Automaton であるとは，任意の $\bar{x}$, $\bar{y}$ に対して $\bar{x}\cdot\bar{y}\in L(M)$ ならば $\bar{x}\in L(M)$ が成り立つことである。

M の状態 s が trapping state であるとは，すべての $a\in\Sigma^{(p)}$ に対して $\delta(s, a)=s$ が成り立つことである。

Prefix Automaton については次の命題が成り立つ。〔4〕

命題 3.1　最簡形有限オートマトン M が Prefix Automaton であるための必要十分条件はもし nonfinal state が存在するならば，それは trapping であり，しかもただ1つに限られることである。

命題 3.2　最簡形 Prefix Automaton M が trivial でない区間を含むある集合を定義するためには，M が少なくとも1つの trapping final state を持つことが必要十分である。

命題 3.3　Prefix Automaton は閉集合を定義する。

これで以下の議論に必要な準備が整った。ここで触れなかったものについては通常の約束に従うものとする。

まず R-equivalent に関する2つの結果を示そう。

定理 3.1　$q=p^e$ なる自然数 p, $q>1$, $e>0$ を考える。このとき $\Sigma^{(p)}$ 上の任意の Prefix Autmaton に対して R-equivalent な $\Sigma^{(q)}$ 上の有限オートマトンが存在する。

〔証明〕　$M=(S, \Sigma^{(p)}, \delta, s_0, F)$ は任意の Prefix Automaton であるとする。

M から有限オートマトン

$$N=(S, \Sigma^{(q)}, \eta, s_0, F)$$

を作る。

ここに η は，任意の $s\in S$, $b\in\Sigma^{(q)}$ に対して

$$\eta(s, b)=\delta(s, a_1 a_2\cdots a_e)$$

で定義される。ただし a_1, a_2, …, a_e は

$$a_1 p^{e-1}+a_2 p^{e-2}+\cdots+a_e=b$$

を満足する $\Sigma^{(p)}$ の適当な文字である。

従ってすべての $n\geq 1$, $s\in S$ について

(*) $\eta(s, b_1 b_2\cdots b_n)=\delta(s, a_{11} a_{12}\cdots a_{1e}\cdot a_{21} a_{22}\cdots a_{2e}\cdot\cdots\cdot a_{n1} a_{n2}\cdots a_{ne})$

が成り立つ。ただしすべての $i\leq n$ に対し

$$(b_i)_q=(a_{i1} a_{i2}\cdots a_{ie})_p$$

である。

今，(0, 1) の実数 x をとると定義3.1により適当な関数

$$\alpha : N\to\Sigma^{(p)}$$

$$\beta : N\to\Sigma^{(q)}$$

が存在して

$$x=0.\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(n)\cdots$$
$$=0.\beta(1)\beta(2)\cdots\beta(n)\cdots$$

と書ける。

$x\in R_M^{(p)}$ であれば $\delta(s_0, \bar{\alpha}(n))\in F$ である。ただし n は任意．したがって

$$\delta(s_0, \bar{\alpha}(en))\in F.$$

(*) により

(**) $\delta(s_0, \bar{\alpha}(en))=\eta(s_0, \bar{\beta}(n))$

ただし $(\bar{\alpha}(en))_p=(\bar{\beta}(n))_q$ である。

従って任意の n について

$$\eta(s_0, \bar{\beta}(n))\in F.$$

よって　$x\in R_N^{(q)}$

逆に $x\in R_N^{(q)}$ を勝手にとると任意の n について $\eta(s_0, \bar{\beta}(n))$ は F に属す。

(**) から $\delta(s_0, \bar{\alpha}(en))\in F$

よってすべての n に対して

$\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(n)\alpha(n+1)\cdots\alpha(en)\in L(M)$

M は Prefix Automaton であるから

$\bar{\alpha}(n)\in L(M)$

よって $x\in R_M^{(p)}$

従って $R_M^{(p)}=R_N^{(q)}$ である。 $\boxtimes$

この結果に対し特に $e=1$ のときは逆が成り立つこと，すなわち radix が同じならば R-equivalent な Prefix Automaton が構成できることを示そう。

定理 3.2 $\Sigma^{(p)}$ 上の任意の有限オートマトン M に対して，同一アルファベット上の Prefix Automaton N が存在して $R_M^{(p)}=R_N^{(p)}$ とすることができる。

〔証明〕 $M=(S,\ \Sigma^{(p)},\ \delta,\ s_0,\ F)$ とする。M から $\Sigma^{(p)}$ 上の有限オートマトン N を次のように構成する。

$$N=(T,\ \Sigma^{(p)},\ \eta,\ s_0,\ G)$$

ここに $T=S\cup\{t\}$ で t は S にない新しい状態記号である。

$$G=S$$

$\eta: T\times\Sigma^{(p)}\to T$ はつぎの通り。

任意の $s\in S$, $a\in\Sigma^{(p)}$ について

$\delta(s,\ a)\in F$ のとき $\eta(s,\ a)=\delta(s,\ a)$

$\delta(s,\ a)\notin F$ のとき $\eta(s,\ a)=t$

すべての $a\in\Sigma^{(p)}$ に対して $\eta(t,\ a)=t$

まず，このように定義された有限オートマトン N が Prefix Automaton の条件を満たしていることを示そう。

$\bar{x}\notin L(N)$ を任意にとると

$$\eta(s_0,\ \bar{x})\notin G$$

従って $\eta(s_0,\ \bar{x})=t$ でなければならない。t は trapping state であるから

どんな $\bar{y}$ をとっても

$$\eta(s_0, \bar{x}\bar{y})=\eta(t, \bar{y})=t\notin G$$

すなわち任意の $\bar{x}$, $\bar{y}$ に対して

$\bar{x}\notin L(N)$ ならば $\bar{x}\bar{y}\notin L(N)$

よって N は Prefix Automaton である。

次に $R_M^{(p)}=R_N^{(p)}$ が成り立つことを示す。

$x\in R_M^{(p)}$ を任意にとると

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

と書けて，すべての n について

$$\delta(s_0, a_1a_2\cdots a_n)\in F$$

である。ここに a_n (n は任意) は $\Sigma^{(p)}$ の文字である。

今，$\delta(s_i, a_{i+1})=s_{i+1}\in F$, $i=0, 1, \cdots, n-1$

であったとすると，η の定義および $F\subseteq S=G$ であることから

$$\eta(s_i, a_{i+1})=s_{i+1}\in G, \ i=0, 1, \cdots, n-1$$

である。

したがってすべての n について

$$\eta(s_0, a_1a_2\cdots a_n)\in G$$

よって $x\in R_N^{(p)}$ である。

つぎに任意の x について $x\notin R_M^{(p)}$ ならば

$x\notin R_N^{(p)}$ を示して逆の包含関係を確立しよう。

$x\notin R_M^{(p)}$ であれば $x=0.a_1a_2\cdots$ について

ある n が存在して

$$\delta(s_0, a_1a_2\cdots a_n)\notin F$$

てある。

このような最小の n をとる。すなわち

$$\delta(s_i, a_{i+1})=s_{i+1}\in F, \ i=0, 1, \cdots, n-2$$

$$\delta(s_{n-1},\ a_n)=s_n \notin F$$

とすると

$$\eta(s_i,\ a_{i+1})=s_{i+1},\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$$

$$\eta(s_{n-1},\ a_n)=t$$

である。

従って

$$\eta(s_0,\ a_1 a_2 \cdots a_n)=t \notin G$$

となり $a_1 a_2 \cdots a_n \notin L(N)$

よって $x \notin R_N^{(p)}$

以上により R-equivalency が確められ，よって定理は成り立つ。 ☒

この結果により定理3.1に於ける M が Prefix Automaton であることの要請は不要のものとなる。すなわち定理3.1，3.2により次の系を得る。

系 自然数 $p,\ q>1$ が，ある $e>0$ について $q=p^e$ を満足するとき $\Sigma^{(p)}$ 上の任意の有限オートマトン M に対して $R_M^{(p)}=R_N^{(q)}$ なる $\Sigma^{(q)}$ 上の有限オートマトン N をつくることができる。

この系の意味は M が p 進法の数の上で作動しても N が q 進法の数の上で作動しても，ステップ数は異なるが両者は同じ集合を定義するということである。

これで R-equivalent に関する議論は一応終る。なお reduced R-equivalent finite automaton を得る手続きは一般の最簡形有限オートマトンを得る議論に帰着する。

次に勝手に与えられた有理閉区間を定義する有限オートマトンの存在性を証明しよう。

定理 3.3 $\Sigma^{(p)}$ 上で展開された任意の有理数 $a,\ b$ (ただし $a \leq b$ とする) に対し，ある有限オートマトン M が存在して $R_M^{(p)}=[a,\ b]$ とすることができる。

〔証明〕 与えられた $a,\ b$ は有理数であるから適当な $k,\ l,\ m,\ n$ が存

在して

$a=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\dot{\alpha}_{k+1}\cdots\dot{\alpha}_l$

$b=0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\dot{\beta}_{m+1}\cdots\dot{\beta}_n$

と書けて，更に適当な $r\leq\min(l, n)$ が存在して，すべての $i<r$ に対し

$\alpha_i=\beta_i$

$\alpha_r<\beta_r$

である。

このとき次なる $\Sigma^{(p)}$ 上の有限オートマトン M が構成される。

$M=(S, \Sigma^{(p)}, \delta, q_1, F)$

ここに

$S=\{q_i \mid 0\leq i\leq r\}$

$\cup\{s_i \mid \min(k, r)+1\leq i\leq l\}$

$\cup\{t_i \mid \min(m, r)+1\leq i\leq n\}$

$S-F=\{q_1\}$

$\delta: S\times\Sigma^{(p)}\to S$ は次の通りである。

ただし $\alpha_i=\beta_i\,(i<r)$ は γ_i であらわす。

すべての $\gamma\in\Sigma^{(p)}$ に対して

$\delta(q_0, \gamma)=q_0$

$\delta(q_i, \gamma_i)=q_{i+1}$

$\gamma\neq\gamma_i$ に対し

$\delta(q_i, \gamma)=q_1$; $i=1, \cdots, r-1$

$\delta(q_r, \alpha_r)=s_{r+1}$

$\delta(q_r, \beta_r)=t_{r+1}$

$\alpha_r<\gamma<\beta_r$ に対して

$\delta(q_r, \gamma)=q_0$

$\gamma<\alpha_r, \gamma>\beta_r$ に対して

$\delta(q_r, \gamma)=q_1$

$\delta(s_i, \alpha_i)=s_{i+1}$

$\gamma>\alpha_i$ に対して

$\delta(s_i, \gamma)=q_0$

$\gamma<\alpha_i$ に対して

$\delta(s_i, \gamma)=q_1$; $i=\min(k, r)+1, \cdots, l-1$

$\delta(s_l, \alpha_l)=s_{k+1}$

$\gamma>\alpha_l$ に対して

$\delta(s_l, \gamma)=q_0$

$\gamma<\alpha_l$ に対して

$\delta(s_l, \gamma)=q_1$

$\delta(t_i, \beta_i)=t_{i+1}$

$\gamma>\beta_i$ に対して

$\delta(t_i, \gamma)=q_1$

$\gamma<\beta_i$ に対して

$\delta(t_i, \gamma)=q_0$; $i=\min(m, r)+1, \cdots, n-1$

$\delta(t_n, \beta_n)=t_{m+1}$

$\gamma>\beta_n$ に対して

$\delta(t_n, \gamma)=q_1$

$\gamma<\beta_n$ に対して

$\delta(t_n, \gamma)=q_0$

このような M について $R_M^{(p)}=[a, b]$ であることを示す。ただし議論の簡潔さのため限量記号（quantifier）を用いる。

まず $[a, b]\subseteq R_M^{(p)}$ を確立しよう。$\forall x\in[a, b]$ をとると

$x=0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{r-1}\gamma_r\cdots\gamma_i\gamma_{i+1}\cdot{}_{i+2}\bar{\gamma}$ と書けて

case 1 $\forall i(\bar{\gamma}_i=\bar{\alpha}_i)$ のとき $x=a$を M に読み込ませると次なる M の状態の推移を得る。

$\forall i<r[\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=q_{i+1}\in F]$ &

$\forall i\quad[r\leq i\leq l\to\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=s_{i+1}\in F]$ &

$\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_l)=s_{k+1}\in F$ &

$\forall j\,\forall i\ [j\geq 1\ \&\ k+1\leq i<l\to$

$\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_l\,({}_{k+1}\bar{\gamma}_l)^j{}_{k+1}\bar{\gamma}_i)=s_{i+1}\in F$ &

$\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_l\,({}_{k+1}\bar{\gamma}_l)^{j+1})=s_{k+1}\in F]$

よって $\forall i[\bar{\gamma}_i\in L(M)]$

従って $x=a\in R_M^{(p)}$

case 2 $\forall i(\bar{\gamma}_i=\bar{\beta}_i)$ のときも case 1 と同様にして $x=b\in R_M^{(p)}$ が示される。このときは case 1 における k, l, s_i がそれぞれ m, n, t_i に置き換えられねばならない。

case 3 $\exists i(\bar{\gamma}_i\neq\bar{\alpha}_i)$ & $\exists i(\bar{\gamma}_i\neq\bar{\beta}_i)$ のとき

$a<x<b$ で

subcase 1 $\forall i<r(\bar{\gamma}_i=\bar{\alpha}_i=\bar{\beta}_i)$ & $\gamma_r=\alpha_r$ &

$\gamma_{r+1}>\alpha_{r+1}$ & ${}_{r+2}\bar{\gamma}\in\Sigma^{(p)*}$ のとき

$\forall i<r\ [\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=q_{i+1}\in F]$ &

$\delta(q_r,\ \gamma_r)=s_{r+1}\in F$ &

$\delta(s_{r+1},\ \gamma_{r+1})=q_0\in F$ &

$\forall\ {}_{r+2}\bar{\gamma}\in\Sigma^{(p)*}[\delta(q_0,\ {}_{r+2}\bar{\gamma})=q_0\in F]$

すなわち $\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_r)=s_{r+1}$ & $\forall i>r[\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=q_0]$

である。

よって $\forall i[\bar{\gamma}_i \in L(M)]$

従って $x \in R_M^{(p)}$

subcase 2 $\forall i < r(\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i)$ &

$\alpha_r < \gamma_r < \beta_r$ & ${}_{r+1}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}$ のとき

$\forall i < r[\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_{i+1} \in F]$ &

$\delta(q_r, \bar{\gamma}_r) = q_0 \in F$ &

$\forall {}_{r+1}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}[\delta(q_0, {}_{r+1}\bar{\gamma}) = q_0 \in F]$

すなわち $\delta(q_1, \bar{\gamma}_{r-1}) = q_r$ & $\forall i \geq r[\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_0]$

である。

よって $\forall i[\bar{\gamma}_i \in L(M)]$

従って $x \in R_M^{(p)}$

subcase 3 $\forall i < r(\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i)$ & $\gamma_r = \beta_r$ &

$\gamma_{r+1} < \beta_{r+1}$ & ${}_{r+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}$ のとき

$\forall i < r[\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_{i+1} \in F]$ &

$\delta(q_r, \gamma_r) = t_{r+1} \in F$ &

$\delta(t_{r+1}, \gamma_{r+1}) = q_0 \in F$ &

$\forall {}_{r+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}[\delta(q_0, {}_{r+2}\bar{\gamma}) = q_0 \in F]$

すなわち $\delta(q_1, \bar{\gamma}_r) = t_{r+1}$ & $\forall i > r[\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_0]$

である。

よって $\forall i[\bar{\gamma}_i \in L(M)]$

従って $x \in R_M^{(p)}$

subcase 4 $\exists i > r[\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i$ & $r_{i+1} > \alpha_{i+1}$ &

${}_{i+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}]$ のとき

このような i を1つ固定して i_0 とすると

$\forall i \leq i_0 [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = s_{i+1} \in F]$ &

$\delta(s_{i_0+1}, \gamma_{i_0+1}) = q_0 \in F$ &

$\forall {}_{i_0+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*} [\delta(q_0, {}_{i_0+2}\bar{\gamma}) = q_0 \in F]$

すなわち $\forall i [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) \in F]$

よって $\forall i [\bar{\gamma}_i \in L(M)]$

従って $x \in R_M^{(p)}$

subcase 5 $\exists i > r [\bar{\gamma}_i = \bar{\beta}_i$ & $\gamma_{i+1} < \beta_{i+1}$ & ${}_{i+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}]$ のとき

subcase 4 と同様にして

$\forall i \leq i_0 [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = t_{i+1} \in F]$ &

$\forall i > i_0 [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_0 \in F]$ を得る。

よって $\forall i [\bar{\gamma}_i \in L(M)]$

従って $x \in R_M^{(p)}$

これで一方の包含関係が確立された。

今度は逆に $\forall x \in R_M^{(p)}$ をとる。すると

$x = 0.\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_i \cdots$

と書けて $\forall i [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) \in F]$ である。ただしすべての i について $\gamma_i \in \Sigma^{(p)}$

case 1 $\forall i < r \exists j [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_j$ & $2 \leq j \leq r]$ &

$\forall i \geq r \exists j [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = s_j$ & $\min(k, r) + 1 \leq j \leq l]$

のとき，有限オートマトン M の状態の推移は

$\forall i < r [\delta(q_i, \gamma_i) = q_{i+1}]$ &

$\delta(q_r, \gamma_r) = s_{r+1}$ &

$\forall i [r+1 \leq i \leq l-1 \to \delta(s_i, \gamma_i) = s_{i+1}]$ &

$\delta(s_l, \gamma_l) = s_{k+1}$ &

$\forall j \forall i [j \geq 1 \ \& \ k+1 \leq i \leq l-1 \to \delta(s_i, \gamma_{jl-jk+i}) = s_{i+1} \ \&$

$\delta(s_{l}, \gamma_{(j+1)l-jk}) = s_{k+1}]$

である。

従って

$\forall i [1 \leq i < r \to \gamma_i = \alpha_i] \ \&$

$\forall i [r \leq i \leq l \to \gamma_i = \alpha_i] \ \&$

$\forall j \forall i [j \geq 1 \ \& \ k+1 \leq i \leq l \to \gamma_{jl-jc+i} = \gamma_i = \alpha_i]$

となり

$$x = 0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r\cdots\gamma_k\dot{\gamma}_{k+1}\cdots\dot{\gamma}_l$$
$$= 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r\cdots\alpha_k\dot{\alpha}_{k+1}\cdots\dot{\alpha}_l$$

または

$$x = 0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k\dot{\gamma}_{k+1}\cdots\gamma_r\cdots\dot{\gamma}_l$$
$$= 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\dot{\alpha}_{k+1}\cdots\alpha_r\cdots\dot{\alpha}_l$$

と書けて，$x = a$ である。

よって $x \in [a, b]$

case 2 $\forall i < r \exists j [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_j \ \& \ 2 \leq j \leq r] \ \&$

$\forall i \geq r [\delta(q_1, \bar{\gamma}_i) = q_0]$ のとき

M の状態の推移は

$\forall i < r [\delta(q_i, \gamma_i) = q_{i+1}]$ で

subcase 1 $\delta(q_r, \gamma_r) = q_0$ のとき

$\bar{\gamma}_{r-1} = \bar{\alpha}_{r-1} = \bar{\beta}_{r-1} \ \& \ \alpha_r < \gamma_r < \beta_r \ \& \ {}_{r+1}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}$ である。

従って $0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{r-1}\cdot\alpha_r\cdot{}_{r+1}\bar{\alpha} = a$

$< 0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{r-1}\cdot\gamma_r\cdot{}_{r+1}\bar{\gamma} = x$

$< 0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{r-1}\cdot\beta_r\cdot{}_{r+1}\bar{\beta} = b$

となり $a<x<b$

よって $x \in [a, b]$

subcase 2 適当な $i_0>r$ が存在して

$$\delta(q_r, \gamma_r)=s_{r+1} \ \&$$

$\forall i\,[r+1 \leq i \leq i_0 \to \delta(s_i, \gamma_i)=s_{i+1}]$ &

$$\delta(s_{i_0+1}, \gamma_{i_0+1})=q_0 \ \&$$

$\forall i \geq i_0+2\,[\delta(q_0, \gamma_i)=q_0]$ のとき

$\bar{\gamma}_{r-1}=\bar{\alpha}_{r-1}=\bar{\beta}_{r-1}$ & $\gamma_r=\alpha_r<\beta_r$ & ${}_{r+1}\bar{\gamma}_{i_0}={}_{r+1}\bar{\alpha}_{i_0}$ &

$\gamma_{i_0+1}>\alpha_{i_0+1}$ & ${}_{i_0+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}$ である。

従って

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r\alpha_{r+1}\cdots\alpha_{i_0}\alpha_{i_0+1}\cdot{}_{i_0+2}\bar{\alpha}=a$$

$$<0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\alpha_r\alpha_{r+1}\cdots\alpha_{i_0}\gamma_{i_0+1}\cdot{}_{i_0+2}\bar{\gamma}=x$$

$$<0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1}\beta_r\cdot{}_{r+1}\bar{\beta} \qquad =b$$

となり $a<x<b$

よって $x \in [a, b]$

subcase 3 適当な $i_0>r$ が存在して

$$\delta(q_r, r_r)=t_{r+1} \ \&$$

$\forall i[r+1 \leq i \leq i_0 \to \delta(t_i, \gamma_i)=t_{i+1}]$ &

$$\delta(t_{i_0+1}, \gamma_{i_0+1})=q_0 \ \&$$

$\forall i \geq i_0+2\,[\delta(q_0, \gamma_i)=q_0]$ のとき

$\bar{\gamma}_{r-1}=\bar{\beta}_{r-1}=\bar{\alpha}_{r-1}$ & $\gamma_r=\beta_r>\alpha_r$ & ${}_{r+1}\bar{\gamma}_{i_0}={}_{r+1}\bar{\beta}_{i_0}$ &

$\gamma_{i_0+1}<\beta_{i_0+1}$ & ${}_{i_0+2}\bar{\gamma} \in \Sigma^{(p)*}$ である。

従って $0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_{r-1}\alpha_r\,{}_{r+1}\bar{\alpha} \qquad =a$

$$<0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_{r-1}\beta_r\beta_{r+1}\cdots\beta_{i_0}\gamma_{i_0+1}\cdot{}_{i_0+2}\bar{\gamma}=x$$

$$<0.\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_{r-1}\beta_r\beta_{r+1}\cdots\beta_{i_0}\beta_{i_0+1}\cdot{}_{i_0+2}\bar{\beta}=b$$

となり $a<x<b$

よって $x\in[a,\ b]$

case 3 $\forall i<r\,\exists j[\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=q_j\ \&\ 2\leq j\leq r]\ \&$

$\forall i\geq r\,\exists j[\delta(q_1,\ \bar{\gamma}_i)=t_j\ \&\ \min(m,\ r)+1\leq j\leq n]$ のとき，

case 1と同様にして

$\forall i[1\leq i\leq n\rightarrow\gamma_i=\beta_i]\ \&$

$\forall j\forall i[j\geq 1\ \&\ m+1\leq i\leq n\rightarrow\gamma_{jn-jm+i}=\gamma_i=\beta_i]$ が示され

$$x=0.\ \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r\cdots\gamma_m\dot{\gamma}_{m+1}\cdots\dot{\gamma}_n$$

$$=0.\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_r\cdots\beta_m\dot{\beta}_{m+1}\cdots\dot{\beta}_n$$

または

$$x=0.\ \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m\dot{\gamma}_{m+1}\cdots\gamma_r\cdots\dot{\gamma}_n$$

$$=0.\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_m\dot{\beta}_{m+1}\cdots\beta_r\cdots\dot{\beta}_n$$

と書ける。

すなわち $x=b$で，$x\in[a,\ b]$ である。

これで $R_M^{(p)}=[a,\ b]$ が確立されて定理の証明が完結した。 ☒

次に FA-定義可能な集合のクラスのブール演算の下での閉包性を考察する。まずこのクラスが$\cup$，$\cap$の下で閉じていることを示そう。

定理 3.4 任意に与えられた$\Sigma^{(p)}$上の2つの有限オートマタ M，Nに対して

$$R_M^{(p)}\cup R_N^{(p)}=R_A^{(p)}$$

$$R_M^{(p)}\cap R_N^{(p)}=R_B^{(p)}$$

なる有限オートマタ A，Bが存在する。

〔**証明**〕 定理 3.2 により

$$M=(S,\ \Sigma^{(p)},\ \delta,\ s_0,\ F)$$
$$N=(T,\ \Sigma^{(p)},\ \eta,\ t_0,\ G)$$

は Prefix Automata であるとしても一般性は失なわれない。

$\Sigma^{(p)}$ 上の有限オートマタ A, B をつぎのように定義する。

$$A=(U,\ \Sigma^{(p)},\ \xi,\ u_0,\ H_A)$$
$$B=(U,\ \Sigma^{(p)},\ \xi,\ u_0,\ H_B)$$

ここに

$$U=\left\{\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}\middle|\ s\in S,\ t\in T\right\}$$

$\xi:U\times\Sigma^{(p)}\to U$ は次のように定義される。

任意の $a\in\Sigma^{(p)}$ に対し

$$\xi\left(\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix},\ a\right)=\begin{bmatrix}\delta(s,\ a)\\\eta(t,\ a)\end{bmatrix}$$

$$u_0=\begin{bmatrix}s_0\\t_0\end{bmatrix}$$

$$H_A=\left\{\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}\middle|\ s\in F\vee t\in G\right\}$$

$$H_B=\left\{\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}\middle|\ s\in F\ \&\ t\in G\right\}$$

このとき $R_M^{(p)}\cup R_N^{(p)}=R_A^{(p)}$, $R_M^{(p)}\cap R_N^{(p)}=R_B^{(p)}$ であることを示そう。

任意に $x\in R_M^{(p)}\cup R_N^{(p)}$ をとると

$$x=0.\ \alpha(1)\,\alpha(2)\cdots\alpha(i)\cdots$$

と書けて

$\forall i\,[\delta(s_0,\ \bar{\alpha}(i))\in F]\vee\forall i\,[\eta(t_0,\ \bar{\alpha}(i))\in G]$ である。

ここにすべての i について $\alpha(i)\in\Sigma^{(p)}$

従って

$\forall i\,[\delta(s_0,\ \bar{\alpha}(i))\in F\vee\eta(t_0,\ \bar{\alpha}(i))\in G]$

よって $\forall i\,[\xi(u_0,\ \bar{\alpha}(i))\in H_A]$

ゆえに $x\in R_A^{(p)}$

逆に $x \in R_A^{(p)}$ をとると

$$x=0.\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(i)\cdots$$

について $\forall i[\xi(u_0, \bar{\alpha}(i)) \in H_A]$

従って

$\forall i[\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \in F \vee \eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$

case 1 $\forall i[\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \in F]$ のとき

$$x \in R_M^{(p)} \subseteq R_M^{(p)} \cup R_N^{(p)}$$

case 2 $\exists i[\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \notin F]$ のとき

このような最小の i を i_0 とする。

M は Prefix Automaton であるから

$\forall i \geq i_0 [\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \notin F]$

ところが $\forall i[\xi(u_0, \bar{\alpha}(i)) \in H_A]$ であるから

$\forall i \geq i_0 [\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \in F \vee \eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$

でなければならないが，前者はあり得ないから

$\forall i \geq i_0 [\eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$

N は Prefix Automaton であったから

$\forall i[\eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$

よって $x \in R_N^{(p)} \subseteq R_M^{(p)} \cup R_N^{(p)}$

一方 $R_M^{(p)} \cap R_N^{(p)} = R_B^{(p)}$ については明らかである。

すなわち

$$x \in R_M^{(p)} \cap R_N^{(p)}$$

$$\leftrightarrow \forall i[\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \in F] \ \& \ \forall i[\eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$$

$$\leftrightarrow \forall i[\delta(s_0, \bar{\alpha}(i)) \in F \ \& \ \eta(t_0, \bar{\alpha}(i)) \in G]$$

$$\leftrightarrow \forall i[\xi(u_0, \bar{\alpha}(i)) \in H_B]$$

$$\leftrightarrow x \in R_B^{(p)}$$

⊠

このように FA–定義可能な集合のクラスは，∪，∩ の演算の下で閉じているが，次の定理で示すように補集合をとる演算の下では閉じていない。証明は文献〔4〕の結果を使う。

定理 3.5 FA–定義可能な集合のクラスは補集合をとる演算ーの下で閉じていない。

〔証明〕 もしも閉じていると仮定すると空集合でもなく，全空間でもない勝手な集合 R_M に対して $R_N=\bar{R}_M$ となる有限オートマトン N が存在する。この有限オートマトン N から定理 3.2 に従って R–equivalent な Prefix Automaton N' を得ることができる。すなわち $R_{N'}=\bar{R}_M$ であって N' は Prefix Automaton.

命題 3.3 から $\bar{R}_M$ は閉集合である。

よって R_M は開集合。

一方，有限オートマトン M から R–equivalent な Prefix Automaton M' を得る。つまり $R_M=R_{M'}$.

よって R_M は閉集合。

R_M は空集合でもなく，全空間でもないのであるからこれは不合理である。 ☒

定理 3.2 を用いれば命題 3.3 はつぎのように言い換えることができる。

命題 3.4 有限オートマトンは閉集合を定義する。

この結果を用いれば定理 3.5 の証明は一層簡潔になる。

定理 3.4，3.5 をまとめて次の定理とする。

定理 3.6 FA–定義可能な集合のクラスはブール代数系をなさない。

§4 むすび

本稿は有限オートマトンが正規集合を受理するという古典的な結果に対し，有限オートマトンの別な機能，すなわち定義可能性について述べたものである。

もちろん FA-定義可能性も有限オートマトンの受理可能性を基本に構成されているわけであるが，受理される集合とは異なる様相を帯びた集合が定義される点が面白い。

正規集合の個々の元は自分自身の生成過程をそれぞれ構造的に持っており，個々の元の構造を決めるものは文法である。

一方，FA-定義可能な集合は命題 3.4，定理 3.3 に見られるような位相的な集合である。

命題 3.4 を形式化すると

$$\forall M \exists x, y \in \boldsymbol{R} [R_M = [x, y]]$$

ということであるが，この逆の

$$\forall x, y \in \boldsymbol{R} \exists M [R_M = [x, y]]$$

は残された問題である。

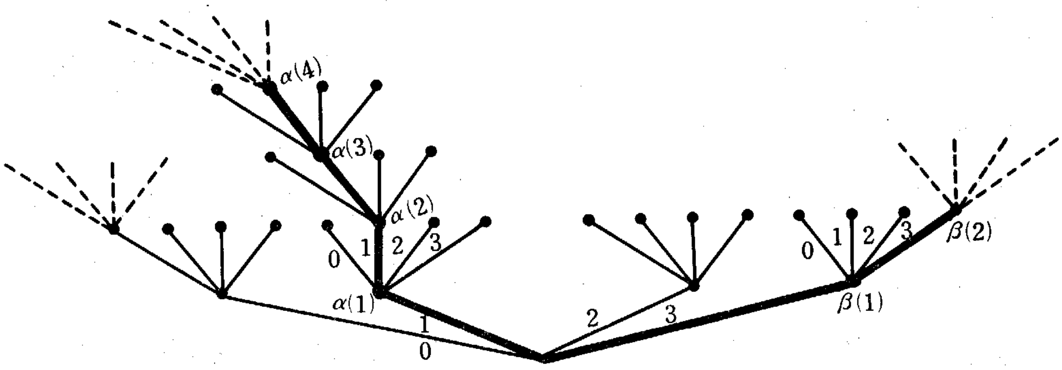
しかしながらまったく random な情報を無限に持つ実数からその特徴を取り出して有限オートマトンを構成する手続きはとても recursive であるとは思えない。従ってこの命題は否定的であろう。ただ x, y が有理数の場合は定理 3.3 により肯定的に解かれている。定理 3.2 は使い道の広い補題である。そもそも Prefix Automaton は FA-定義可能な実数に対しては普通の有限オートマトンと何ら異なる動作をするものでないことは定義 3.2 より明らかである。

定理 3.1 は tree 上を動くオートマトンを考えると理解しやすい。たとえば $q=4$, $p=2$, $e=2$ とすると 0.15… については

$$0.15\cdots=(0.\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \cdots)_2=(0.\ \ 3\ \ 3\ \cdots)_4$$
$$0.\ \alpha(1)\ \alpha(2)\ \alpha(3)\ \alpha(4)\cdots\qquad 0.\ \beta(1)\ \beta(2)\cdots$$

と展開される。

これを tree で表現すると下図のようになる。ここに各節は $\alpha(i)$, $\beta(i)$ を表わし各枝は q を法とする radix を表わしている。



このとき Prefix 15 を受理するのに M は 4 ステップ, N は 2 ステップを要し, 結局同じ役割を演ずるのである。

このような無限に伸びた tree 上を動くオートマトンに関する議論は文献〔5〕,〔6〕,〔7〕に見つけられるので今後は, 実数の定義可能性をより fruitful なものに改め, 更に研究を進めて行きたい。

最後に本稿の執筆を勧めて下さった本学教授前川良博先生および本稿の基本的なアイデアを御教示下さった法政大学教授田中尚夫先生に深謝の意を表します。

〔1〕 Hopcroft, J. E and Ullman, J. D, (1969), "Formal Languages and Their Relation to Automata", Addison-Wesley, Cambridge, MA

〔2〕 笠井・成島・野口・守屋, (1974), 「言語理論の最近の話題 I, II, III」, 情報処理 Vol 15, pp. 67-76, 133-141, 212-220.

〔3〕 Salomaa, A, (1966), "Two Complete Axiom Systems for the Algebra of Regular Events ", J. Assoc. Comput. Mach, Vol 13, pp, 158-169.

〔4〕 Hartmanis, J and Stearns, R. E, (1967), "Sets of Numbers Defined by Finite Automata", American Math. Monthly, Vol 74, pp. 539-542.

〔5〕 McNaughton, R, (1966), "Testing and Generating Infinite Sequences by a Finite Automaton", Information and Control, Vol 9, pp. 521-530.

〔6〕 Rabin, M, (1969), "Decidability of Second-order Theories and Automata on Infinite Trees", Trans. Amer. Math. Soc. Vol 141, pp. 1-35.

〔7〕 Choueka, Y, (1974), "Theories of Automata on ω-Tapes : A Simplified Approach", Journal of Computer and System Sciences, Vol 8, pp. 117-141.